

Geometrie 1 - Modulul 2

Spatiu afine și subspatii afine

Definiție Un spatiu afine real este un triplet $A = (X, \vec{X}, \Phi)$, unde:

- ⊙ $X \neq \emptyset$ ale cărei elemente s.n. puncte
- ⊙ $\vec{X}$ este un sp. vect. real. ale cărei elemente s.n. vectori
- ⊙ $\Phi: X \times X \rightarrow \vec{X}$ aplic. liniară cu asociativă fiecărei perechi de puncte.

$$(A, B) \mapsto \Phi(A, B) = \vec{AB} \text{ a.î.}$$

$$A_1) \exists O \in X \text{ și } \Phi_O: X \rightarrow \vec{X}, \Phi_O(A) = \Phi(O, A) = \vec{OA},$$

Φ_O - bijectiv

$$A_2) \forall A, B, C \in X: \Phi(A, B) + \Phi(B, C) = \Phi(A, C)$$

(relația lui Chasles)

Exemple: $(\mathbb{E}_1, \mathcal{V}_1, \Phi)$, $(\mathbb{E}_2, \mathcal{V}_2, \Phi)$, $(\mathbb{E}_3, \mathcal{V}_3, \Phi)$, $\Phi(A, B) = \vec{AB}$

Definiție $\dim_{\mathbb{R}} A = \dim_{\mathbb{R}} \vec{X}$, unde $A = (X, \vec{X}, \Phi)$.

Dacă $\dim_{\mathbb{R}} A = n$, notăm A_n sau X_n .

Convenim că $\dim_{\mathbb{R}} A = 0 \Leftrightarrow X = \{\text{un singur punct}\}$

$\dim_{\mathbb{R}} A = -1 \Leftrightarrow X = \emptyset$

Definiție. Un sp. afine de dim. 1 s.n. dreaptă afină sau simpleu dreptă

• Un sp. afine de dim. 2 s.n. plan afine sau simpleu plan

Proprietăți 1) $\forall O' \in X, \phi_{O'}: X \rightarrow \vec{X}, \phi_{O'}(A) = \phi(O', A)$ este bijectivă

Dem.: Fie $\psi: \vec{X} \rightarrow \vec{X}$

$$\bar{v} \mapsto \psi(\bar{v}) = \bar{v} + \phi(O', O)$$

Arătăm că ψ este bijectivă

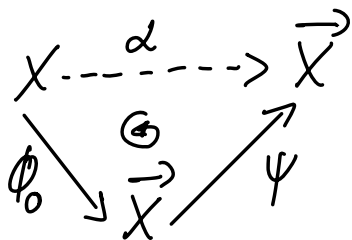
○ ψ injectivă

$$\begin{aligned} \psi(\bar{v}_1) = \psi(\bar{v}_2) &\Leftrightarrow \bar{v}_1 + \phi(O', O) = \bar{v}_2 + \phi(O', O) \\ &\Leftrightarrow \bar{v}_1 = \bar{v}_2 \end{aligned}$$

○ ψ surjectivă

$\forall \bar{u} \in \vec{X}, \exists? \bar{v} \in \vec{X}$ a.i. $\psi(\bar{v}) = \bar{u}$.

$$\begin{aligned} \text{Fie } \bar{v} &= \bar{u} - \phi(O', O). \text{ Atunci, } \phi(\bar{v}) = \bar{v} + \phi(O', O) \\ &= \bar{u} - \phi(O', O) + \phi(O', O) \\ &= \bar{u} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \alpha &= \psi \circ \phi_O: X \rightarrow \vec{X} \text{ bijectivă} \\ \alpha(A) &= \psi(\phi_O(A)) \\ &= \phi_O(A) + \phi(O', O) \\ &= \phi(O, A) + \phi(O', O) \\ &= \phi(O', A) \\ &= \phi_{O'}(A), \forall A \in X \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha = \phi_{O'} \Rightarrow \underline{\phi_{O'} \text{ bijectivă}}$$

$$2) \forall P \in X: \phi(P, P) = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$$

Dem. Din A2) $\Rightarrow \phi(P, P) + \phi(P, P) = \phi(P, P) \Rightarrow \phi(P, P) = \vec{0}$

$$3) \text{ Dacă } \phi(P, Q) = \vec{0} \text{ at. } P = Q$$

Dem.: $\phi_P: X \rightarrow \vec{X}$ este biject. $\Rightarrow$ inject. $\left. \begin{array}{l} \text{stim } \phi_P(P) = \vec{0} \\ \phi_P(Q) = \vec{0} \end{array} \right\} \Rightarrow Q = P.$

$$4) \forall P, Q \in X: \phi(P, Q) = -\phi(Q, P)$$

Dem.: $\phi(P, Q) + \phi(Q, P) = \phi(P, P) = \vec{0} \Rightarrow \phi(P, Q) = -\phi(Q, P)$

5) (Proprietatea paralelogramului)

$$\phi(P_1, Q_1) = \phi(P_2, Q_2) \Rightarrow \phi(P_1, P_2) = \phi(Q_1, Q_2)$$

$$\begin{aligned} \phi(P_1, P_2) &= \phi(P_1, Q_1) + \phi(Q_1, Q_2) + \phi(Q_2, P_2) \\ &= \phi(P_1, Q_1) - \underbrace{\phi(P_2, Q_2)}_{=\vec{0}} + \phi(Q_1, Q_2) \\ &= \phi(Q_1, Q_2) \end{aligned}$$

$$6) \forall P, Q \in X: \phi(P, Q) = \phi(Q, Q) - \phi(Q, P)$$

$$\begin{aligned}\phi(P, Q) &= \phi(P, O) + \phi(O, Q) \\ &= -\phi(O, P) + \phi(O, Q)\end{aligned}$$

Observație. Cum $\phi_P: X \rightarrow \vec{X}$ este bijectivă pt. $\forall P \in X$, obț. că

$$\phi_P(Q) = \phi_P(R) \Rightarrow Q = R.$$

$$[\vec{PQ} = \vec{PR} \Rightarrow Q = R]$$

Propoziție (Caracterizarea spațiilor afine)

Fie $A = (X, \vec{X}, \phi)$ un sp. afîn real. At. aplicația

$+: X \times \vec{X} \rightarrow X$ def. prin

$$(P, \vec{u}) \mapsto Q = P + \vec{u} \text{ d.m.d. } \vec{u} = \vec{PQ}$$

are urm. prop.:

$$a) P + (\vec{u} + \vec{v}) = (P + \vec{u}) + \vec{v}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{X}$$

$$b) P + \vec{u} = P \text{ d.m.d. } \vec{u} = \vec{0}$$

$$c) \forall P, Q \in X, \exists \vec{u} \in \vec{X} \text{ a.i. } Q = P + \vec{u}$$

Reciproc, dată o aplic. "+" cu prop. a), b) și c), $\exists$ o structură de sp. afîn real pe X a.i. $\vec{X}$ să fie $\mathbb{R}$ -sp. vect. direct.

Dem. $\boxed{\Rightarrow}$ a) $P + (\bar{u} + \bar{v}) = (P + \bar{u}) + \bar{v}$

$$P + (\bar{u} + \bar{v}) = Q \Leftrightarrow \bar{u} + \bar{v} = \overrightarrow{PQ}$$

$$P + \bar{u} = R \Leftrightarrow \bar{u} = \overrightarrow{PR}$$

$$(P + \bar{u}) + \bar{v} = R + \bar{v} = S \Leftrightarrow \bar{v} = \overrightarrow{RS}$$

$$\Rightarrow \bar{u} + \bar{v} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} \Leftrightarrow \bar{u} + \bar{v} = \overrightarrow{PS}$$

$$\Rightarrow Q = S, \text{ deci } P + (\bar{u} + \bar{v}) = (P + \bar{u}) + \bar{v}$$

b) $P + \bar{u} = P \Leftrightarrow \bar{u} = \vec{0}$

$$P + \bar{u} = P \Leftrightarrow \bar{u} = \overrightarrow{PP} \Leftrightarrow \bar{u} = \vec{0}$$

c) $\forall P, Q \in X, \exists \bar{u} \in \bar{X} : Q = P + \bar{u}$

Fie $\bar{u} = \Phi(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$. At. este clar că $Q = P + \bar{u}$
 $\boxed{\Leftarrow}$ Vom să găsim $\Phi: X \times X \rightarrow \bar{X}$ care să satisfacă

A1) și A2)

Def. $\Phi: X \times X \rightarrow \bar{X}$

$\Phi(P, Q) = \bar{u}$ d.m.d. $Q = P + \bar{u}$, $\forall P, Q \in X$

sau altfel spus

$\Phi(P, P + \bar{u}) = \bar{u}$, $\forall P \in X \Leftrightarrow \Phi_P(P + \bar{u}) = \bar{u}$, $\forall P \in X$

[Din c) știm că orice $Q \in X$ se poate scrie ca
 $Q = P + \bar{u}$, unde $P \in X, \bar{u} \in \bar{X}$]

A1) $\exists O \in X: \phi_O: X \rightarrow \vec{X}$, biject.

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ } \forall O, P, Q \in X \text{ w. } \phi_O(P) = \phi_O(Q) \\ O, P \in X \Rightarrow \exists \bar{u} \in \vec{X} \text{ a.i. } P = O + \bar{u} \Rightarrow \phi_O(P) = \bar{u} \\ O, Q \in X \Rightarrow \exists \bar{v} \in \vec{X} \text{ a.i. } Q = O + \bar{v} \Rightarrow \phi_O(Q) = \bar{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{u} = \bar{v}$$

$$\Rightarrow O + \bar{u} = O + \bar{v} \Leftrightarrow P = Q \Rightarrow \phi_O \text{ inject}$$

$$\textcircled{2} \text{ } \forall \bar{u} \in \vec{X}, \exists? P \in X \text{ a.i. } \phi_O(P) = \bar{u}$$

$$\text{ } \forall P = O + \bar{u} \text{ (w. } \bar{u} \in \vec{X} \text{)}. \text{ Then } \phi_O(P) = \phi_O(O + \bar{u}) = \bar{u}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi_O \text{ surjective}$$

A2) $\forall P, Q, R \in X: \phi(P, Q) + \phi(Q, R) = \phi(P, R)$

$$\left. \begin{array}{l} P, Q \in X \Rightarrow \exists \bar{u} \in \vec{X} \text{ a.i. } Q = P + \bar{u} \Rightarrow \phi(P, Q) = \bar{u} \\ Q, R \in X \Rightarrow \exists \bar{v} \in \vec{X} \text{ a.i. } R = Q + \bar{v} \Rightarrow \phi(Q, R) = \bar{v} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi(P, Q) + \phi(Q, R) = \bar{u} + \bar{v}$$

$$\left. \begin{array}{l} Q = P + \bar{u} \\ R = Q + \bar{v} \end{array} \right\} \Rightarrow R = (P + \bar{u}) + \bar{v} \Leftrightarrow R = P + (\bar{u} + \bar{v}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi(P, R) = \bar{u} + \bar{v}$$

$$\Rightarrow \phi(P, Q) + \phi(Q, R) = \phi(P, R)$$

Definiție Fie $A = (X, \vec{X}, \Phi)$ un sp. afin real. O submult. nevidă
 Y a lui X s.m. subspațiu afin dacă există un subspațiu
 vectorial $V \subset \vec{X}$ a.t. $A_1 = (Y, V, \Phi_1 = \Phi|_{Y \times Y})$ este un sp. afin real.

Exemple:

1) Orice subspațiu vectorial a unui sp. vectorial este
 spațiu afin.

2) Orice intersecție nevidă de subspații afini ale unui
 sp. afin este un subspațiu afin.

Dacă $\dim_{\mathbb{R}} A = n$ și $\dim_{\mathbb{R}} A_1 = n-1$ atunci A_1 s.m.
hiperplan.

Definiție Sp. afin real $A = (X, \vec{X}, \Phi)$ s.m. euclidian
 dacă spațiul său liniar director este sp. liniar
 euclidian, adică este înzestrat cu produs scalar
 $\langle, \rangle : \vec{X} \times \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$ cu prop:
 o formă biliniară, simetrică cu forma pătratică
 asociată poz. definită.

Reamintim că produsul scalar pe $\vec{X}$ induce o normă definită prin $|\cdot| : \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $|\vec{u}| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$, $\forall \vec{u} \in \vec{X}$.

Cu ajutorul normei putem defini funcția distanță

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$d(P, Q) = |\vec{PQ}|, \quad \forall P, Q \in X.$$

$$1) d(P, Q) = d(Q, P)$$

$$2) d(P, Q) \geq 0 \text{ și } d(P, Q) = 0 \text{ d.m.d. } P = Q.$$

$$3) d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$$

Planul și dreapta

Definiție Fie d o dreaptă din E_3 și un plan π din E_3 . Dacă $d \perp \pi$ atunci d s.m. normală la π și π s.m. normal la d . Dacă direcția dreptei d este dată de un vector $\vec{u}$ și $\vec{\pi} = [\vec{a}, \vec{b}]$, $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$, atunci $\vec{u}$ s.m. vector normal la π și $\vec{\pi}$ s.m. planul vectorial normal la d

În E_3 : Planul este unic determinat de:

- 1) 1 punct și 2 vect. necoliniari
- 2) 3 puncte necoliniare
- 3) 1 punct și un vector normal.

În E_3 : Dreapta este unic determinată de:

- 1) 1 punct și 1 vector
- 2) 2 puncte distincte
- 3) 1 punct și un plan vectorial normal
- 4) două plane concurente

În E_2 : Dreapta este unic determinată de:

- 1) 1 punct și 1 vector normal la dreapta
- 2) 1 punct și panta sa (dacă dreapta nu este verticală)

Ecuațiile unui plan în E_3

Fie $(E_3, \mathcal{V}_3, \Phi)$ și $R = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ un reper ortonormat în E_3 .

Fie $P_0(x_0, y_0, z_0) \in E_3$, $\bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{V}_3 \setminus \{0\}$, $\bar{u} \wedge \bar{v}$,

$\bar{u} = (u^1, u^2, u^3)$, $\bar{v} = (v^1, v^2, v^3)$. Not. $\vec{OP_0} = \vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$

Fie planul π planul ce conține punctul P_0 și are direcția planară dată de vectorii $\bar{u}$ și $\bar{v}$, i.e. $\vec{\pi} = [\bar{u}, \bar{v}]$.

Not. $\pi = P_0 + \vec{\pi}$ sau $\pi = P_0 + [\bar{u}, \bar{v}]$

Fie $P \in \pi$ cu vect. de poz. $\vec{r} = \vec{OP}$, $\vec{r} = (x, y, z)$. At.
 P satisface următoarele ecuații:

1) Ec. vectorială: $\vec{r} = \vec{r_0} + t\bar{u} + s\bar{v}$, $t, s \in \mathbb{R}$

2) Ec. matricială: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$, $t, s \in \mathbb{R}$

3) Ec. parametrică:
$$\begin{cases} x = x_0 + tu^1 + sv^1 \\ y = y_0 + tu^2 + sv^2 \\ z = z_0 + tu^3 + sv^3 \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$$

4) Ec. sub formă de determinant

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & u^1 & v^1 \\ y-y_0 & u^2 & v^2 \\ z-z_0 & u^3 & v^3 \end{vmatrix} = 0$$

5) Ec. generală: $ax+by+cz=d$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$
unde $(a,b,c) = \vec{u} \times \vec{v}$ $a^2+b^2+c^2 > 0$.

6) Ec. cu produs scalar:

$$\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0$$

$$\pi: ax+by+cz=d \quad \left. \begin{array}{l} \\ P_0 \in \pi \Rightarrow ax_0+by_0+cz_0=d \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: (x-x_0)a + (y-y_0)b + (z-z_0)c = 0$$

$$\Rightarrow \pi: \langle (x-x_0, y-y_0, z-z_0), (a,b,c) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \pi: \langle \vec{r} - \vec{r}_0, (a,b,c) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \pi: \langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0.$$

Observatie 1. Dacă $A, B, C \in E_3$ sunt 3 puncte necoliniare, atunci $\vec{AB} \nparallel \vec{AC}$ și putem considera planul det. de punctele A, B și C ca fiind planul

$$\pi = A + [\vec{AB}, \vec{AC}]$$

Dacă $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C)$

$$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

$$\vec{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$$

Observatie 2. Dacă $A \in E_3, \vec{m} \in V_3 \setminus \{\vec{0}\}$, atunci planul ce conține punctul A și care are direcția normală dată de $\vec{m}$ este planul cu ecuația:

$$\pi: \langle \vec{r} - \vec{r}_A, \vec{m} \rangle = 0,$$

$$\text{unde } \vec{r}_A = \vec{OA} = (x_A, y_A, z_A)$$

$$\vec{m} = (a, b, c) \in [\vec{\pi}]^\perp$$

$$\pi: a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$\pi: ax + by + cz = d, a^2 + b^2 + c^2 > 0$$

$$d = ax_A + by_A + cz_A = \langle \vec{m}, \vec{r}_A \rangle$$

Posiția relativă a 2 plane în E_3

Fie π_1 și π_2 două plane din E_3 . Fie $\vec{n}_1$ și $\vec{n}_2$ direcțiile normale la π_1 și π_2 respective. Deci $\vec{n}_1 \perp \pi_1$ și $\vec{n}_2 \perp \pi_2$

- (I) Dacă $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ at. planele π_1 și π_2 sunt paralele sau coincid.
(II) Dacă $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$, at. planele π_1 și π_2 se intersectează, iar intersecția lor este o dreaptă.

$$\text{Dacă } \pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad a_i, b_i, c_i, d_i \neq 0, i=1,2$$

$$\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$\text{Dacă } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} \Rightarrow \pi_1 = \pi_2$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2} \Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$$

Ecuațiile dreptei în plan și în spațiu

Fie $(E_3, \mathcal{V}_3, \Phi)$ și $R = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ un reper cartezian în E_3 .

Fie $P_0(x_0, y_0, z_0) \in E_3$ și $\bar{u} \in \mathcal{V}_3 \setminus \{\bar{0}\}$, $\bar{u} = (u^1, u^2, u^3)$.

Not. $\vec{OP}_0 = \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Fie dreapta d dreapta ce conține punctul P_0 și are direcția dată de $\bar{u}$, i.e. $\vec{d} = [\bar{u}]$.

Not. $d = P_0 + \vec{d}$ sau $d = P_0 + [\bar{u}]$

Un punct $P(r)$, $r = (x, y, z)$ aparține dreptei d dacă și numai dacă:

1) Ec. vectorială: $r = \vec{r}_0 + t\bar{u}$, $t \in \mathbb{R}$

2) Ec. matricială: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

3) Ec. parametrică:
$$\begin{cases} x = x_0 + tu^1 \\ y = y_0 + tu^2 \\ z = z_0 + tu^3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

4) Ec. canonică: $\frac{x-x_0}{u^1} = \frac{y-y_0}{u^2} = \frac{z-z_0}{u^3}$

5) Ec. ca intersecție de plane:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 > 0, i = \overline{1, 2}$$

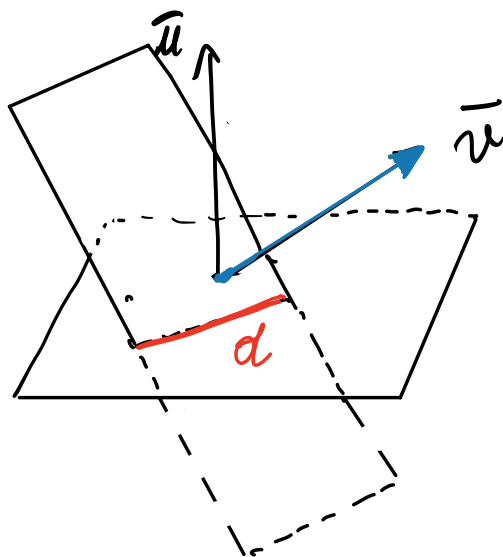
Observație 1. Dacă $A, B \in \mathbb{E}_3$ sunt două puncte distincte atunci dreapta ce trece prin cele 2 puncte A și B este dreapta ce trece prin A și are direcția dată de vectorul $\overrightarrow{AB}$.

$$d = A + [\overrightarrow{AB}].$$

Observație 2. Fie $A \in \mathbb{E}_3$ cu $\overrightarrow{OA} = \vec{r}_A = (x_A, y_A, z_A)$ și d o dreaptă ce conține A a.i. $[d]^\perp = [\vec{u}, \vec{v}]$, unde $\vec{u}, \vec{v} \in V_3 \setminus \{0\}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Putem gândi dreapta d ca intersecție dintre planul ce conține A și are direcția normală $\vec{u}$, și planul ce conține A și are direcția normală $\vec{v}$.

$$d: \begin{cases} \langle \vec{r} - \vec{r}_A, \vec{u} \rangle = 0 \\ \langle \vec{r} - \vec{r}_A, \vec{v} \rangle = 0 \end{cases}$$



Fie $(\mathcal{E}_2, \mathcal{V}_2, \Phi)$ și $R = \{\vec{O}; \vec{i}, \vec{j}\}$ un reper cartezian în $\mathcal{E}_2$.

Fie $P_0 \in \mathcal{E}_2$, $\vec{u} \in \mathcal{V}_2 \setminus \{\vec{0}\}$; $\vec{OP}_0 = \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$\vec{u} = (u^1, u^2, u^3).$$

Fie d dreapta ce conține P_0 și are direcția dată de $\vec{u}$,
adică $\vec{d} = [\vec{u}]$. Notăm $d = P_0 + \vec{d}$ sau $d = P_0 + [\vec{u}]$.

Ecuațiile dreptei d sunt:

1) Ec. vectorială: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$

2) Ec. matricială: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

3) Ecuațiile parametrice: $\begin{cases} x = x_0 + tu^1 \\ y = y_0 + tu^2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

4) Ecuația canonică: $\frac{x-x_0}{u^1} = \frac{y-y_0}{u^2}$

5) Ec. sub formă de det.: $\begin{vmatrix} x-x_0 & u^1 \\ y-y_0 & u^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow u^2 x - u^1 y = u^2 x_0 - u^1 y_0$$

Not. $\vec{v} = (u^2, -u^1)$. Elan $\vec{v} \perp \vec{u}$.

Ecuația dreptei devine:

$$\langle \vec{r}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{r}_0, \vec{v} \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{v} \rangle = 0, \vec{v} \perp \vec{u}$$

6) Ec. cu produs scalar

$$\uparrow -M2-16-$$

7) Ec. generală: $ax + by = c$ $a, b, c \in \mathbb{R}$
 $a^2 + b^2 > 0$
 $(a, b) = (u^2, -u^1) = \vec{v} \perp \vec{u}$

8) Ec. cu ajutorul pantei: $y - y_0 = m(x - x_0)$

Obs.: Pt. a avea această situație, dreapta nu trebuie să fie verticală, adică dacă avem reperul $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$, $d \nparallel \vec{j}$.

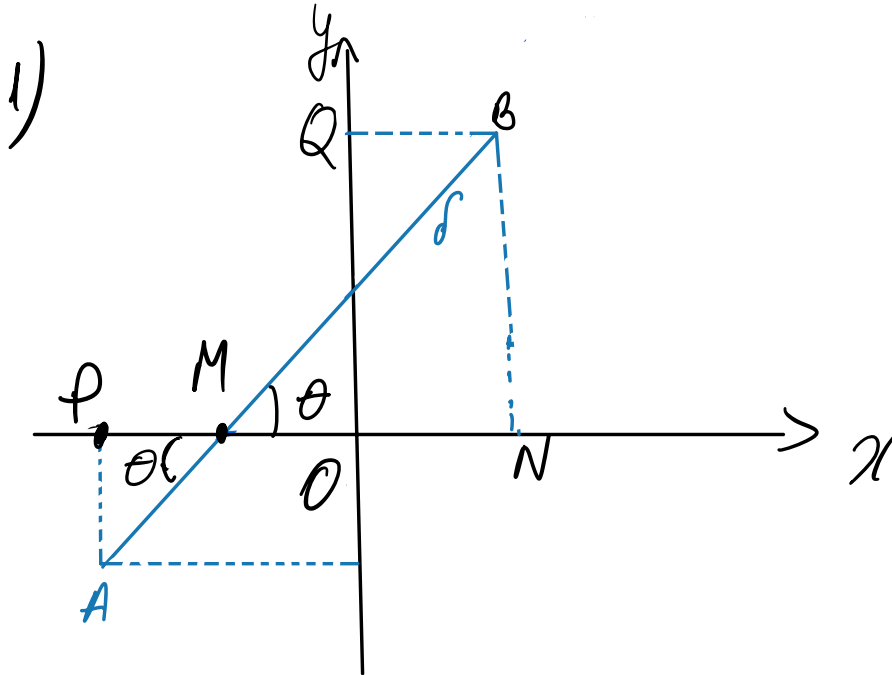
Pp. $d \nparallel \vec{j}$. Fie m - panta dreptei d , adică $m = \tan \theta$, $\theta \in [0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ este unghiul făcut de dreapta cu Ox .

Obs. 1) Dacă $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) \in d$. at.

$$m = \left| \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \right| \text{ pt. } x_A \neq x_B$$

2) Dacă $\vec{d} = [\vec{u}]$, $\vec{u} = (u^1, u^2)$, at.

$$m = \frac{u^2}{u^1}, \quad u^1 \neq 0.$$



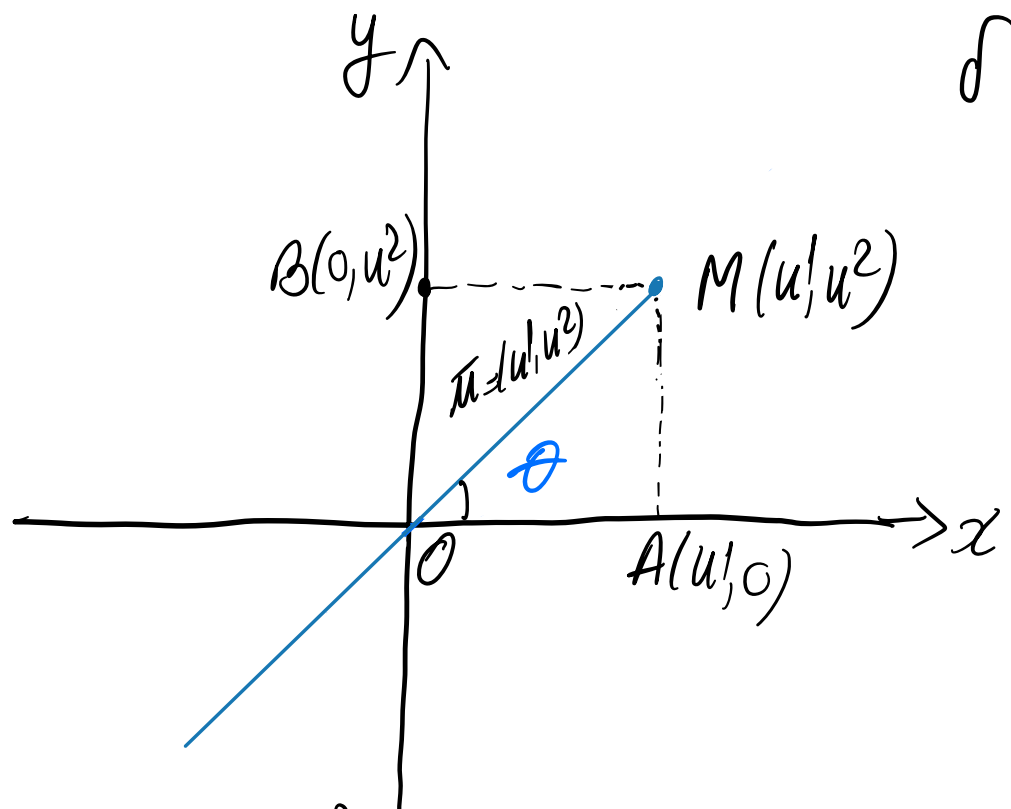
$$m = \operatorname{tg} \theta = \frac{BN}{MN} = \frac{AP}{PM} \Rightarrow$$

$$\frac{BN}{AP} = \frac{MN}{PM} \Rightarrow \frac{BN}{BN+AP} = \frac{MN}{MN+PM} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{BN}{|y_B - y_A|} = \frac{MN}{|x_B - x_A|} \Leftrightarrow \frac{BN}{MN} = \frac{|y_B - y_A|}{|x_B - x_A|}$$

$$\text{Dici, } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

2)



$$\operatorname{tg} \theta = \frac{AM}{OA} = \frac{u^2}{u^1}$$

Observație 1. Dacă $A, B \in \mathbb{E}_2$ sunt două puncte distincte atunci dreapta ce trece prin cele 2 puncte A și B este dreapta ce trece prin A și are direcția dată de vectorul $\vec{AB}$.

$$d = A + [\vec{AB}].$$

Observație 2:

Dacă $b \neq 0$, at. ec. $ax + by + c = 0$ o putem
rescrie

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

ec. dreptei de panta $m = -\frac{a}{b}$ ce trece prin punctul
 $(0, -\frac{c}{b})$

Pozițiile relative ale două drepte în spațiu

Fie (E_3, V_3, Φ) și d_1, d_2 două drepte.

○ Dacă $\underline{d_1 \cap d_2 \neq \emptyset}$, at.

□ Fie d_1 și d_2 sunt drepte concurente, adică
 $d_1 \cap d_2 = \{ \text{un punct} \}$

□ Fie d_1 și d_2 sunt drepte confundate, adică
 $d_1 = d_2$

○ Dacă $\underline{d_1 \cap d_2 = \emptyset}$, at:

□ Fie d_1 și d_2 sunt drepte paralele

□ Fie d_1 și d_2 sunt drepte necoplanare.

Pozițiile relative ale două drepte în plan

Fie (E_2, V_2, Φ) și d_1, d_2 două drepte.

○ Dacă $\underline{d_1 \cap d_2 \neq \emptyset}$, at.

□ Fie d_1 și d_2 sunt drepte concurente, adică
 $d_1 \cap d_2 = \{ \text{un punct} \}$

□ Fie d_1 și d_2 sunt drepte confundate, adică
 $d_1 = d_2$

○ Dacă $\underline{d_1 \cap d_2 = \emptyset}$, at. d_1 și d_2 sunt drepte paralele

Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan

Fie (E_3, V_3, Φ) și d - o dreaptă, π - plan din E_3
○ Dacă $d \cap \pi = \emptyset \Rightarrow d \parallel \pi$.

○ Dacă $d \cap \pi \neq \emptyset$:

$\rightarrow$ dacă $d \cap \pi = \{ \text{punct} \} \Rightarrow d$ și π sunt
concurente (dreapta "întreacă" planul)

$\rightarrow$ dacă $d \cap \pi = \{ d \} \Rightarrow d \subset \pi$

Observatie

$d \subset \pi$ sau $d \parallel \pi \Leftrightarrow \langle \bar{a}, \bar{m} \rangle = 0$, unde $\bar{a} \in \vec{d}$, $\bar{m} \in \vec{\pi}$

p. $\vec{\pi} = \{\bar{u}, \bar{v}\}$. Atunci putem considera $\bar{m} = \bar{u} \times \bar{v}$ si

$$d \subset \pi \text{ sau } d \parallel \pi \Leftrightarrow \langle \bar{a}, \bar{u} \times \bar{v} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow (\bar{a}, \bar{u}, \bar{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{a} = \alpha \bar{u} + \beta \bar{v}$$

Perpendiculara comună a două drepte necoplanare în E_3

Teoremă Fie d_1 și d_2 două drepte necoplanare din E_3 . Atunci există o unică dreaptă ce se sprijină pe cele două drepte și este perpendiculară pe ambele drepte.

Definiție. Această dreaptă s.m. perpendiculara comună a
dreptelor d_1 și d_2 .

Dem.: Existența

Fie d_1, d_2 două drepte necoplanare din E_3 .

Considerăm planul α ce conține dreapta d_1 și este paralel cu dreapta d_2 . Putem face acest lucru ducând printr-un pct. oarecare al dreptei d_1 paralela d_2' la d_2 și $\alpha = (d_1, d_2')$. Fie β planul ce conține dreapta d_2 și este perpendicular pe α . Not. $\alpha \cap \beta = \{d_2''\}$

Arătăm că $d_2'' \parallel d_2$.

Considerăm $\vec{d}_1 = [\vec{a}_1]$, $d_2 \parallel d_2' \Rightarrow \vec{d}_2 = \vec{d}_2' = [\vec{a}_2]$, $\vec{d}_2'' = [\vec{a}_2'']$

$$\vec{a}_2'' = [\vec{a}_1, \vec{a}_2] \quad \left. \begin{array}{l} \vec{a}_2'' \in \alpha \\ d_2'' \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{a}_2'' = \alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \beta \perp \alpha & \Rightarrow \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 \in \vec{\beta} \\ \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 \perp \alpha & \mid \bar{a}_2 \perp \bar{a}_1 \times \bar{a}_2, \bar{a}_2 \in \vec{\beta} \quad \Rightarrow \vec{\beta} = [\bar{a}_2, \bar{a}_1 \times \bar{a}_2] \\ d_2'' \subset \beta & \Rightarrow \bar{a}_2'' = x\bar{a}_2 + y\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\dim(1) + (2) \Rightarrow$$

$$\alpha\bar{a}_1 + (\beta-x)\bar{a}_2 - y\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \vec{0}$$

$$\Downarrow \bar{a}_1 \times \bar{a}_2$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{a}_2'' = \beta\bar{a}_2 \Rightarrow \boxed{d_2 \parallel d_2''}$$

$$\text{Cum } d_2 \parallel d_2'', d_1 \nparallel d_2'', d_1, d_2'' \subset \alpha \Rightarrow \text{dauă dr. concurente } p$$

$$d_1 \cap d_2'' = \{P_1\}$$

Fie p perpendiculara pe planul α ce trece prin P_1 . Deci $p \in \beta$ și

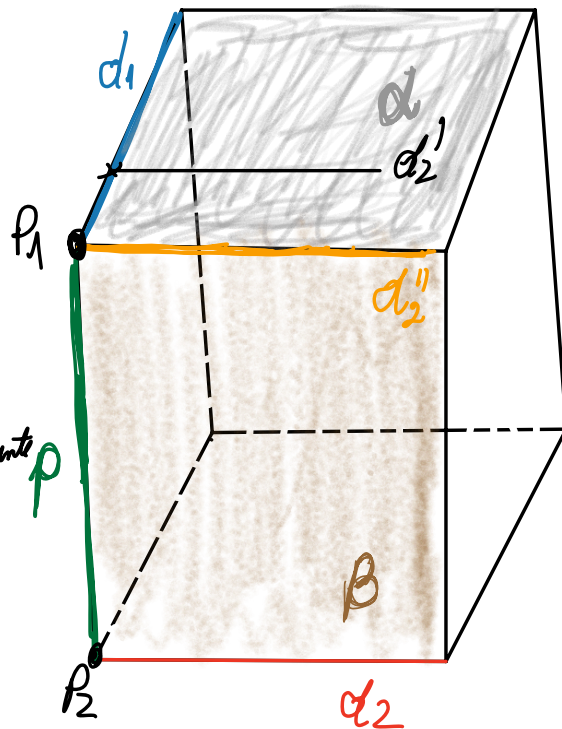
$$p \perp d_1 \text{ și } p \perp d_2'' \Rightarrow p \perp d_2$$

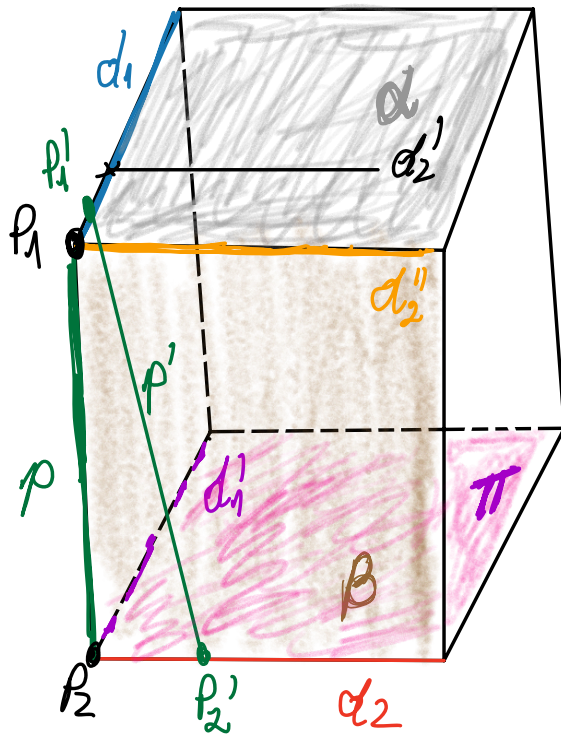
În plus, $d_2'' \parallel d_2$

Deci $\exists p \cap d_2 = \{P_2\}$. Prin urmare, p este perpendiculara comună dreptelor d_1 și d_2 .

Unicitatea

R.A. pp. că există două perpendiculare p și p' pe dreptele d_1 și d_2 . Fie $d_1 \cap p = \{P_1\}$, $d_1 \cap p' = \{P_1'\}$, $d_2 \cap p = \{P_2\}$, $d_2 \cap p' = \{P_2'\}$. Fie d_1' paralela prin P_2 la d_1 și π planul determinat de d_2 și d_1' (concurente).





$$\left. \begin{array}{l} d_1 \parallel d_1' \\ p \perp d_1 \\ p' \perp d_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p \perp d_1' \\ p' \perp d_1' \end{array} \right.$$

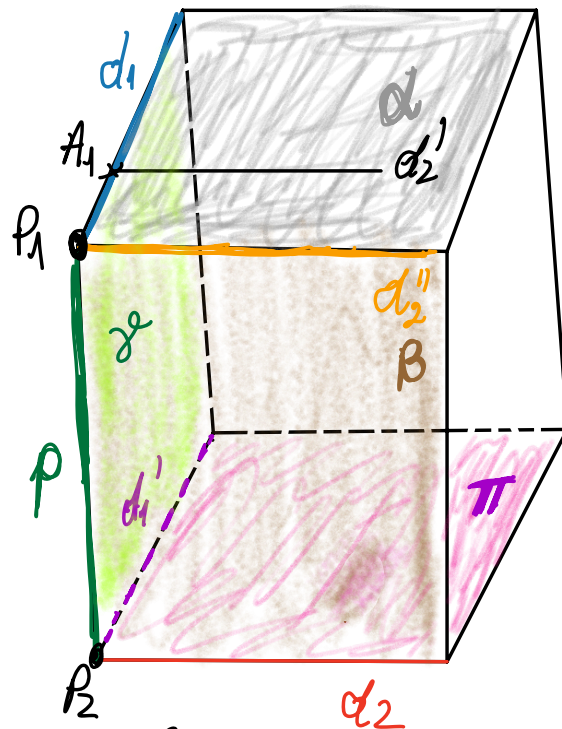
Dar $p \perp d_2$, $p' \perp d_2$, deci p și p' sunt perpendiculare pe π .

(pentru că p și p' sunt perp. pe două drepte concurente din π)

Rez. că $p \parallel p'$. Fie π' planul det. de p și p' . Rez. că $P_1, P_1', P_2, P_2' \in \pi'$, contradicție cu ipoteza că dreptele d_1, d_2 sunt necoplanare

Euclidiile perpendicularei comune

Presupunem că am construit:



- 1) planul α ce conține d_1 și este paralel cu d_2
 - 2) planul β ce conține d_2 și este perpendicular pe α
 - 3) planul π ce conține d_2 și este paralel cu d_1
- Fi $p \cap d_2 = \{P_2\}$ și $d_1' \subset \pi$ a.t. $P_2 \in d_1'$ și $d_1' \parallel d_1$.
 Fi planul γ planul ce conține p și d_1 .

$$\text{Cum } p \perp d_1 \quad \left\{ \Rightarrow \right. p \perp d_1'$$

$$d_1' \parallel d_1$$

Considerăm $\vec{p} = [\vec{p}]$, $\vec{d_1} = [\vec{d_1}]$, $\vec{d_2} = [\vec{d_2}]$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cum } p \perp d_1', p \perp d_2, d_1', d_2 \subset \pi, \text{ rez. c\aa } \vec{\pi}^\perp = [\vec{p}] \\ \text{Cum } d_2 \perp d_1', d_2 \perp p, d_1', p \subset \mathcal{P}, \text{ rez. c\aa } \vec{\mathcal{P}}^\perp = [\vec{a}_2] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{Cum } d_2 \perp p \Rightarrow \vec{a}_2 \perp \vec{p}$$

$\Rightarrow \boxed{\pi \perp \mathcal{P}}$. Deci putem g\aa ndi planul $\mathcal{P}$ ca fiind
planul ce conține dr. d_1 și este perpendicular pe planul π .
Atunci $\mathcal{P} \cap \beta = \mathcal{P} \cap \beta$.

Fie $A_1 \in d_1$ și $A_2 \in d_2$. Atunci:

- $d_1 = A_1 + [\vec{a}_1], d_2 = A_2 + [\vec{a}_2]$.
- $\alpha = A_1 + [\vec{a}_1, \vec{a}_2] \Rightarrow \vec{N} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \in \alpha^\perp$
- $\beta = A_2 + [\vec{a}_2, \vec{N}] \Rightarrow \vec{N}_2 = \vec{a}_2 \times \vec{N} = \vec{a}_2 \times (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \in \beta^\perp$
- $\pi = A_2 + [\vec{a}_1, \vec{a}_2] \Rightarrow \vec{N} \in \pi^\perp$
- $\mathcal{P} = A_1 + [\vec{a}_1, \vec{N}] \Rightarrow \vec{N}_1 = \vec{a}_1 \times \vec{N} = \vec{a}_1 \times (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \in \mathcal{P}^\perp$

Dacă notăm $A_1(\vec{r}_1)$ și $A_2(\vec{r}_2)$:

$$p: \begin{cases} \langle \vec{r} - \vec{r}_1, \vec{N}_1 \rangle = 0 \\ \langle \vec{r} - \vec{r}_2, \vec{N}_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \vec{r} - \vec{r}_1, \vec{a}_1 \times (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \rangle = 0 \\ \langle \vec{r} - \vec{r}_2, \vec{a}_2 \times (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{a}_1, \vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = 0 \\ (\vec{r} - \vec{r}_2, \vec{a}_2, \vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = 0 \end{cases} \quad -M2-27-$$

Unghiul unei drepte cu un subspațiu afin

Definiție. Unghiul dintre dreapta d și subsp. afin γ este unghiul măsurat dintre un vector director arbitrar al lui d și subspațiul liniar euclidian $\vec{\gamma}$, adică, unghiul dintre $\vec{a} \in \vec{d}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ și $P_{\vec{\gamma}} \vec{a}$.

Not. unghiul cu $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

1) Unghiul dintre două drepte d_1 și d_2

Not. $\theta = \angle(d_1, d_2)$

A) Dacă $d_1 = d_2$ sau $d_1 \parallel d_2$, at. $\theta = 0$

B) Dacă $d_1 \cap d_2 = \{P\}$. Fie $d_1 = P + [\vec{a}_1]$, $d_2 = P + [\vec{a}_2]$

At. $\theta = \angle(\vec{a}_2, P_{\vec{a}_1} \vec{a}_2)$

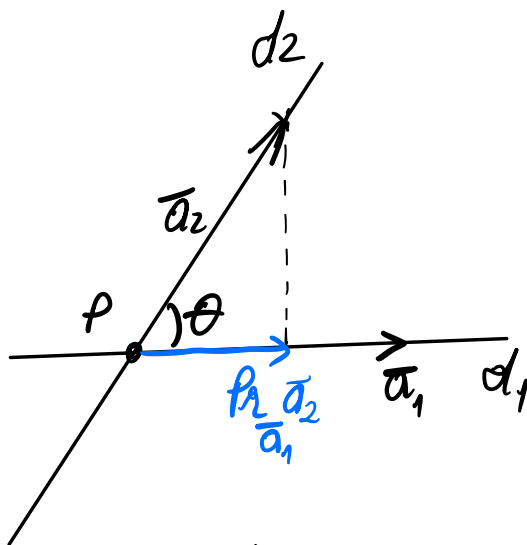
$$\Downarrow$$

$$\cos \theta = \frac{|P_{\vec{a}_1} \vec{a}_2|}{|\vec{a}_2|}$$

$$\Uparrow$$

$$\cos \theta = \left| \frac{\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle}{|\vec{a}_1|^2} \vec{a}_1 \right| \cdot \frac{1}{|\vec{a}_2|}$$

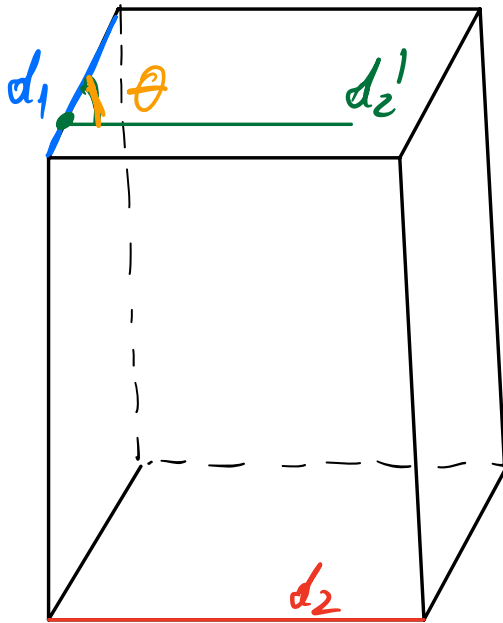
$$\cos \theta = \frac{|\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle|}{|\vec{a}_1| |\vec{a}_2|}$$



c) Dacă d_1 și d_2 sunt necoplanare, unghiul θ se determină în modul următor: printr-un punct oarecare al dr. d_1 se construiește o paralelă de dr. d_2 , not. d_2' . Prin def., $\angle(d_1, d_2) = \angle(d_1, d_2')$

Deci:

$$\cos \theta = \frac{|\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle|}{|\vec{a}_1| |\vec{a}_2|}, \text{ unde } \vec{d}_1 = [\vec{a}_1], \vec{d}_2 = \vec{d}_2' = [\vec{a}_2].$$

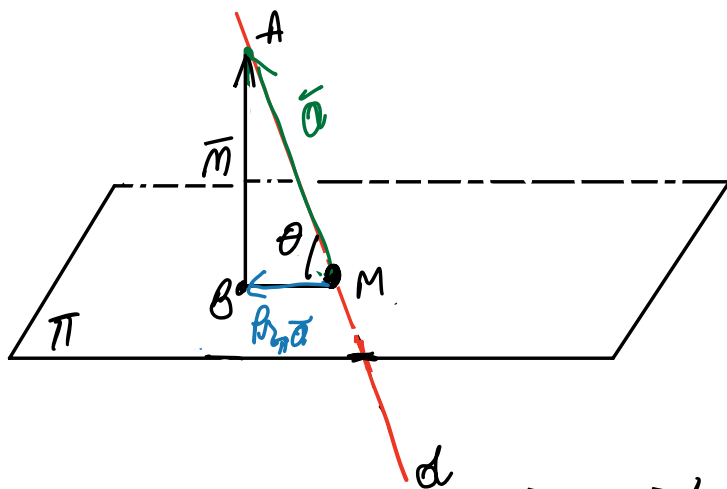


2) Unghiul dintre o dreaptă și un plan

$$\theta = \angle(d, \pi)$$

A) Dacă $d \subset \pi$ sau $d \parallel \pi$, at. $\theta = 0$

B) Dacă $d \cap \pi = \{M\}$, at. $\theta = \angle(\vec{a}, p_{\pi} \vec{a})$, unde $\vec{d} = [\vec{a}]$



$$\Downarrow$$

$$\cos \theta = \frac{|p_{\pi} \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

Notăm $\vec{a} = \vec{MA}$, $\vec{m} = \vec{BA} \in \pi^{\perp}$. Atunci $p_{\pi} \vec{a} = \vec{MB}$

$$\bullet \cos \theta = \frac{MB}{MA}; \sin \theta = \frac{BA}{MA}$$

$$\bullet \langle \vec{a}, \vec{m} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{m}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{m}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{m}| \cdot \cos(\pi - \widehat{BAM})$$

$$= -|\vec{a}| |\vec{m}| \cos(\widehat{BAM})$$

$$= -|\vec{a}| |\vec{m}| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{AMB}\right)$$

$$= -|\vec{a}| |\vec{m}| \sin \theta \Rightarrow |\langle \vec{a}, \vec{m} \rangle| = |\vec{a}| |\vec{m}| |\sin \theta|$$

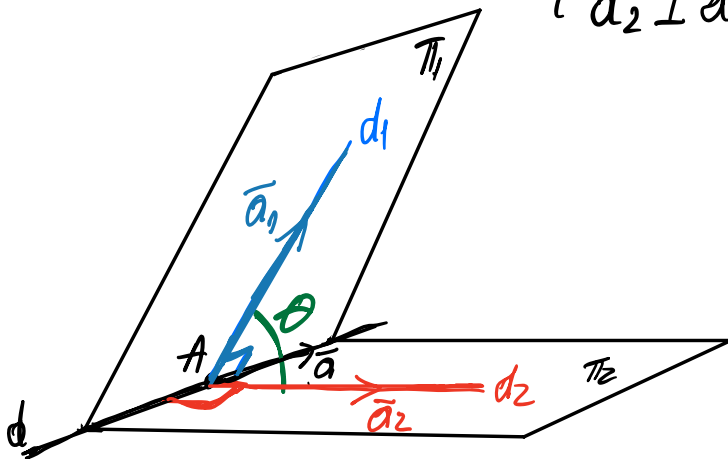
$$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin \theta > 0$$

$$\sin \theta = \frac{|\langle \vec{a}, \vec{m} \rangle|}{|\vec{a}| |\vec{m}|}$$

③ Unghiul dintre 2 plane (unghiul diedru)
 $\theta = \angle(\pi_1, \pi_2)$

A) Dacă $\pi_1 = \pi_2$ sau $\pi_1 \parallel \pi_2 \Rightarrow \theta = 0$

B) Dacă $\pi_1 \cap \pi_2 = \{d\}$, d -dreaptă, atunci θ se determină în modul următor: se consideră un punct arbitrar $A \in d$; se construiesc $\begin{cases} d_1 \perp d, A \in d_1, d_1 \subset \pi_1 \\ d_2 \perp d, A \in d_2, d_2 \subset \pi_2 \end{cases}$



$$\theta = \angle(d_1, d_2) \Rightarrow \cos \theta = \frac{|\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle|}{|\bar{a}_1| |\bar{a}_2|}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{d}_1 = [\bar{a}_1], \vec{d}_2 = [\bar{a}_2] \\ \vec{d} = [\bar{a}] \\ d \perp d_1, d \perp d_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{a} \perp \bar{a}_1 \text{ și } \bar{a} \perp \bar{a}_2$$

$$\text{So } \begin{cases} \bar{m}_1 = \bar{a} \times \bar{a}_1 \in \vec{\pi}_1^\perp \\ \bar{m}_2 = \bar{a} \times \bar{a}_2 \in \vec{\pi}_2^\perp \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \langle \bar{m}_1, \bar{m}_2 \rangle &= \langle \bar{a} \times \bar{a}_1, \bar{a} \times \bar{a}_2 \rangle \\ &= (\bar{a} \times \bar{a}_1, \bar{a}, \bar{a}_2) \\ &= -(\bar{a}_2, \bar{a}, \bar{a} \times \bar{a}_1) \\ &= -\langle \bar{a}_2, \bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{a}_1) \rangle \\ &= -\langle \bar{a}_2, \langle \bar{a}, \bar{a}_1 \rangle \bar{a} - \langle \bar{a}, \bar{a} \rangle \bar{a}_1 \rangle \\ &= -\underbrace{\langle \bar{a}_2, \bar{a}_1 \rangle}_{=0} \underbrace{\langle \bar{a}, \bar{a}_2 \rangle}_{=0} + |\bar{a}|^2 \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle \\ &= |\bar{a}|^2 \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad |\bar{m}_1| &= |\bar{a}| \cdot |\bar{a}_1| \cdot \sin \angle(\bar{a}, \bar{a}_1) \\ &= |\bar{a}| |\bar{a}_1| \cdot \sin \frac{\pi}{2} \\ &= |\bar{a}| |\bar{a}_1| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad |\bar{m}_2| &= |\bar{a}| |\bar{a}_2| \cdot \sin \angle(\bar{a}, \bar{a}_2) \\ &= |\bar{a}| |\bar{a}_2| \cdot \sin \frac{\pi}{2} \\ &= |\bar{a}| |\bar{a}_2| \end{aligned}$$

$$\cos \theta = \frac{|\langle \bar{m}_1, \bar{m}_2 \rangle|}{|\bar{m}_1| |\bar{m}_2|}$$

$\Updownarrow$

$$\text{At.} \quad \frac{\langle \bar{m}_1, \bar{m}_2 \rangle}{|\bar{m}_1| |\bar{m}_2|} = \frac{|\bar{a}|^2 \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle}{|\bar{a}|^2 |\bar{a}_1| |\bar{a}_2|} = \frac{\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2 \rangle}{|\bar{a}_1| |\bar{a}_2|}$$

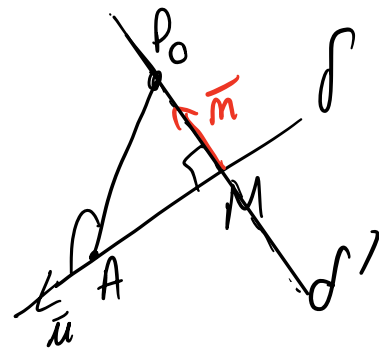
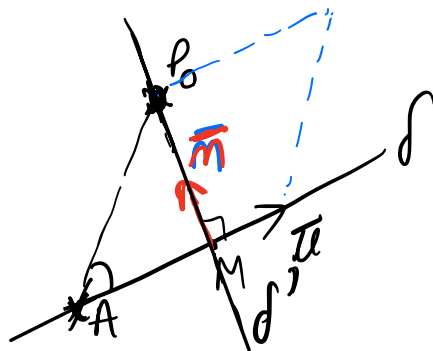
Distanta dintre 2 subspatii afine euclidiene

Definitie . Fie $A_m = (X, \vec{X}, \Phi)$ un sp. afim euclidian real de dim. m , $1 \leq m < \infty$ și $A_1 = (X_1, \vec{X}_1, \Phi|_{X_1 \times X_1})$ și $A_2 = (X_2, \vec{X}_2, \Phi|_{X_2 \times X_2})$ două subspatii nevide ale sale. Distanța dintre A_1 și A_2 este numărul poz. definit prin:

$$\underline{\text{dist}(A_1, A_2) = \min \{ d(P_1, P_2) \mid P_1 \in X_1, P_2 \in X_2 \}}.$$

1) Distanța de la un punct la o dreaptă în E_2 .

Metoda 1 Fie $R = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ reper ortonorm. în E_2 .
 $P_0(x_0, y_0)$, $\delta: ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 > 0$.



Diracția normală la δ este: $\vec{n} = (a, b)$

$$\text{Fi } d' = P_0 + [\vec{m}] \text{ si } d \cap d' = \{M\}.$$

$$\text{At. } \underline{\text{dist}(P_0, d) = |\overrightarrow{P_0 M}|}.$$

$$\text{Putem scrie } d': \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a \\ y = y_0 + t \cdot b \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

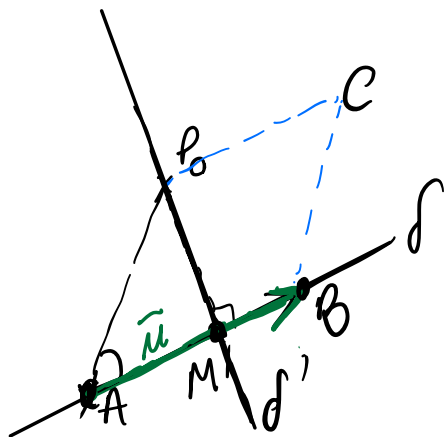
$$\text{Dacă } d \cap d' = \{M\} \text{ si } M(x_M, y_M) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} ax_M + by_M + c = 0 \\ x_M = x_0 + t \cdot a \\ y_M = y_0 + t \cdot b \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &a(x_0 + t \cdot a) + b(y_0 + t \cdot b) + c = 0 \\ &t(a^2 + b^2) + ax_0 + by_0 + c = 0 \\ &t = - \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

$$\text{Deci } M: \begin{cases} x_M = x_0 - \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \cdot a \\ y_M = y_0 - \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \cdot b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{dist}(P_0, d) = |\overrightarrow{P_0 M}|} &= \sqrt{(x_M - x_0)^2 + (y_M - y_0)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\right)^2 (a^2 + b^2)} \\ &= \underline{\underline{\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}} \end{aligned}$$

Metoda 2



Fie $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
 $P_0 M \perp d$
 $M \in d$

Construim paralelogramul det. de vect.
 $\overrightarrow{AP_0}$ și $\vec{u}$, not. $ABCP_0$.

$$A_{ABCP_0} = P_0 M \cdot AB = d(P_0, d) \cdot |\vec{u}|$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\text{dist}(P_0, d) = \frac{A_{ABCP_0}}{|\vec{u}|}}$$

Reamintim det. Geom:

$$G(\vec{u}) = |\vec{u}|, \quad G(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \sin^2 \angle(\vec{u}, \vec{v}) \\ = (A_{\text{paralelog. det de } \vec{u} \text{ și } \vec{v}})^2$$

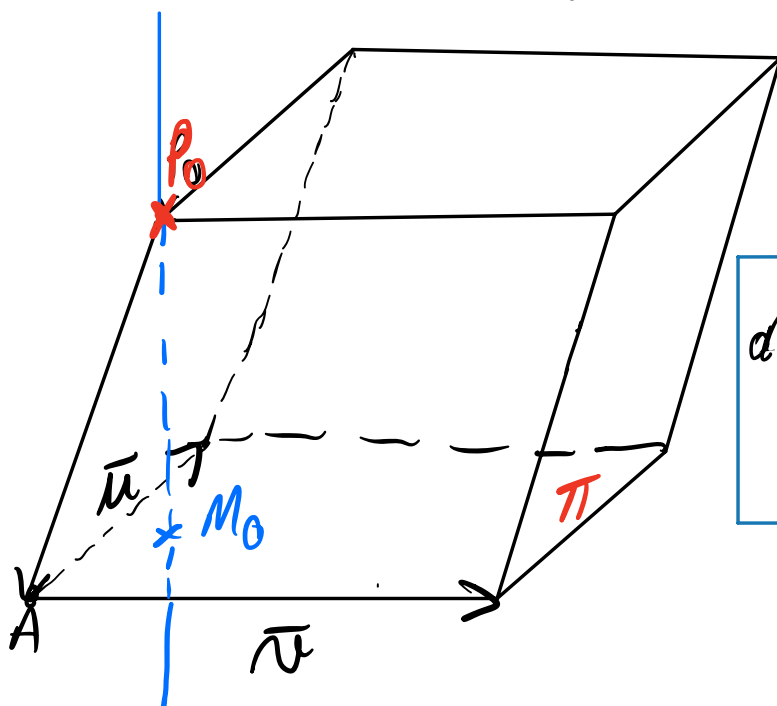
$$\text{Deci } \boxed{\text{dist}(P_0, d) = \sqrt{\frac{G(\overrightarrow{P_0 A}, \vec{u})}{G(\vec{u})}}}$$

$$\text{În } \underline{\underline{\mathbb{E}_3}}: \boxed{\text{dist}(P_0, d) = \frac{|\overrightarrow{P_0 A} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}}$$

2) Distanta de la un punct la un plan în E_3

Metoda 1 Fie $R = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ reper ortonormat în E_3 .

$P_0(x_0, y_0, z_0)$, $\pi: ax+by+cz+d=0$, $a^2+b^2+c^2>0$.



Similar, se obține

$$d(P_0, \pi) = |P_0 M_0| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Metoda 2 Dacă $\pi = A + [\bar{u}, \bar{v}]$, atunci putem scrie:

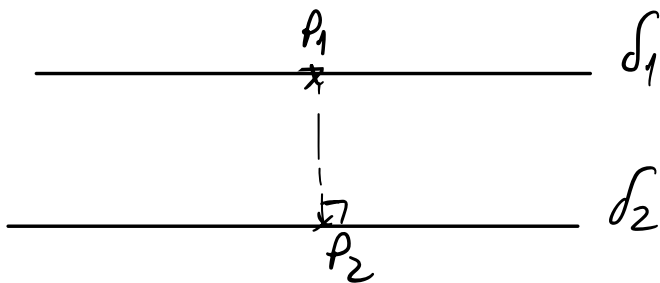
$$\text{dist}(P_0, \pi) = \frac{\text{Volumul paralelipipedului det. de } \vec{P_0 A}, \bar{u}, \bar{v}}{\text{Aria bazei paralelip.}}$$

$$\text{dist}(P_0, \pi) = \frac{|(\vec{P_0 A}, \bar{u}, \bar{v})|}{|\bar{u} \times \bar{v}|}$$

$$\Leftrightarrow \text{dist}(P_0, \pi) = \sqrt{\frac{G(\vec{P_0 A}, \bar{u}, \bar{v})}{G(\bar{u}, \bar{v})}}$$

Distanța dintre două drepte în E_3

- ⊙ Dacă dreptele sunt coplanare și concurrente sau confundate distanța dintre cele 2 drepte este 0.
- ⊙ Dacă dreptele sunt coplanare și paralele atunci distanța dintre cele 2 drepte se calc. în modul următor: se fixează un punct pe una din cele 2 drepte, de ex. $P_1 \in d_1$ și $\text{dist}(d_1, d_2) = \text{dist}(P_1, d_2)$.



- ⊙ Dacă dreptele sunt neoplanare atunci distanța dintre cele 2 drepte se calc. în modul următor: se fixează un punct pe una din drepte, de ex. $P_1 \in d_1$, se construiește perpendiculara comună pe cele 2 drepte ce trece prin P_1 și se consideră P_2 punctul de intersecție dintre perpendiculară și d_2 . At.

$$\underline{\text{dist}(d_1, d_2) = |\overrightarrow{P_1P_2}|}$$

Soluția continuăm

$$d_1 = p_1 + [\bar{a}_1]$$

$$d_2 = p_2 + [\bar{a}_2]$$

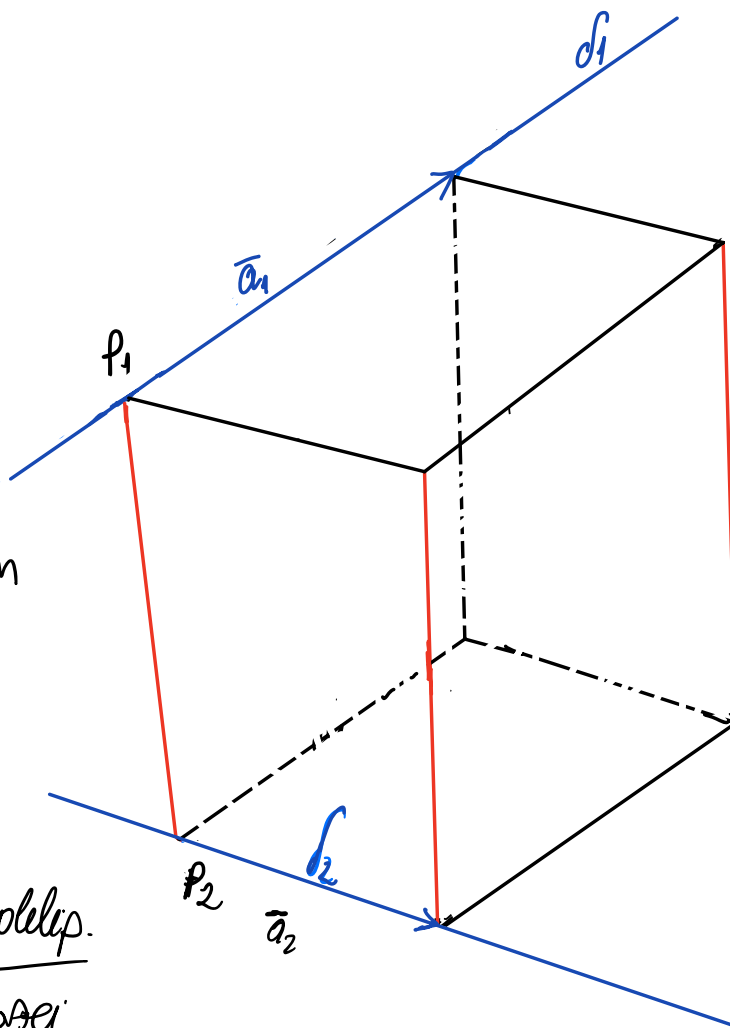
$$\left. \begin{array}{l} p_1 p_2 \perp d_1 \\ p_1 p_2 \perp d_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow p_1 p_2$ înălțime în
paralelipipedul
construit cu vect.
 $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ și $\overrightarrow{p_1 p_2}$.

$$\Rightarrow |\overrightarrow{p_1 p_2}| = \frac{\text{Vol. paralelip.}}{\text{Aria bazei}}$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{p_1 p_2}| = \frac{|(\overrightarrow{AP_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2)|}{|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2|} = \sqrt{\frac{G(\overrightarrow{p_1 p_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2)}{G(\bar{a}_1, \bar{a}_2)}}$$

$$\Leftrightarrow \text{dist}(d_1, d_2) = \frac{|(\overrightarrow{AP_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2)|}{|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2|} = \sqrt{\frac{G(\overrightarrow{p_1 p_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2)}{G(\bar{a}_1, \bar{a}_2)}}$$



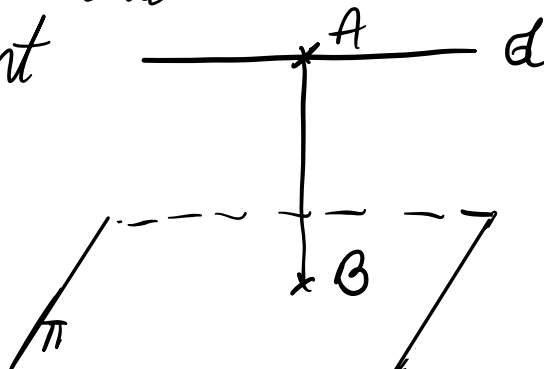
Distanța de la o dreaptă la un plan în $\mathcal{E}_3$

○ Dacă dreapta este inclusă în plan sau dreapta și planul sunt concurente, distanța dintre cele două este zero.

○ Dacă dreapta și planul sunt paralele, atunci,

$$\text{dist}(d, \pi) = \text{dist}(A, \pi),$$

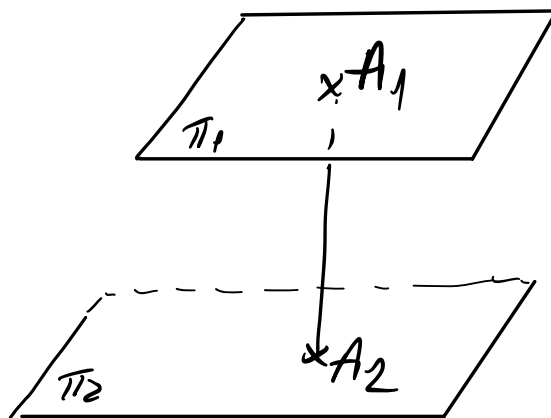
unde $A \in d$



Distanța dintre 2 plane din $\mathcal{E}_3$

○ Dacă $\pi_1 = \pi_2$ sau $\pi_1 \cap \pi_2 = \{ \text{dreaptă} \}$, at. $d(\pi_1, \pi_2) = 0$

○ Dacă $\pi_1 \parallel \pi_2$, at. distanța dintre cele două plane se calculează în modul următor: fixăm un punct A_1 din π_1 și atunci $\text{dist}(\pi_1, \pi_2) = \text{dist}(A_1, \pi_2) = \text{dist}(A_1, A_2)$



Cercul și sfera

Fie $A_m = (X, (\vec{X}, \langle, \rangle), \emptyset)$ un sp. afin n -euclidian
și $R = \{0; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\}$ un reper ortonormat.

Definiție. Fie $\Omega \in X$ și $R > 0$. Hipersfera de centru Ω și raza R
este locul geometric al punctelor $P \in X$ aflate la distanța R de
punctul fix Ω .

$$S^{m-1}(\Omega, R) = \{P \in X \mid \text{dist}(\Omega, P) = R\}$$

Exteriorul hipersferei se def. prin:

$$\text{Ext } S(\Omega, R) = \{P \in X \mid \text{dist}(\Omega, P) > R\}$$

Interiorul hipersferei se def. prin

$$\text{Int } S(\Omega, R) = \{P \in X \mid \text{dist}(\Omega, P) < R\}$$

Ecuațiile hipersferei

Fie $\Omega \in X$ cu vectorul de poz. $\vec{r}_\Omega$ în raport cu R .

Fie $P \in X$ cu vectorul de poz. $\vec{r}$ în raport cu R .

At. $P \in S^n(\Omega, R) \Leftrightarrow |\vec{\Omega P}|^2 = R^2$

$$\Leftrightarrow |\vec{\Omega O} + \vec{OP}|^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow |\vec{r} - \vec{r}_\Omega|^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow |\vec{r}|^2 + |\vec{r}_\Omega|^2 - 2\langle \vec{r}, \vec{r}_\Omega \rangle = R^2$$

$$\Leftrightarrow |\vec{r}|^2 - 2\langle \vec{r}, \vec{r}_\Omega \rangle + (|\vec{r}_\Omega|^2 - R^2) = 0$$

Oicare din ec. le anterioare reprezintă ecuația vectorială a hipersferei cu centrul Ω și rază R .

$$\text{Pentru } \vec{r}_\Omega = w^1 \vec{e}_1 + w^2 \vec{e}_2 + \dots + w^n \vec{e}_n$$

$$\vec{r} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + \dots + x^n \vec{e}_n$$

Obt. ecuația generată a hipersferei:

$$\sum_{i=1}^n (x^i - w^i)^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (x^i)^2 - 2 \sum_{i=1}^n x^i w^i + \left(\sum_{i=1}^n (w^i)^2 - R^2 \right) = 0$$

O hipersferă în planul afin euclidian E_2 este un cerc
- în spațiul afin euclidian E_3 este o sferă

În dim. mici vom nota coordonatele unui punct arbitrar cu (x, y) în E_2 și cu (x, y, z) în E_3 , în raport cu rap. orton. $R = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$, respectiv $R = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

○ Ec. generată a unui cerc din E_2 , de centru

$\Omega(x_0, y_0)$ și notă $R > 0$ este:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + \Delta = 0, \text{ unde } \Delta = x_0^2 + y_0^2 - R^2, \\ \underline{x_0^2 + y_0^2 - \Delta > 0}$$

○ Ec. generată a unei sfere din E_3 de centru

$\Omega(x_0, y_0, z_0)$ și notă $R > 0$ este:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + \Delta = 0, \text{ unde } \Delta = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 \\ \underline{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \Delta > 0}$$

Observații. Fără condiția $x_0^2 + y_0^2 - \Delta > 0$ (respectiv $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \Delta > 0$) am avea un punct (în cazul egalității cu zero), numit punct dublu, sau un cerc/sferă imaginară/imaginară (când conținutul este negativ).

Exemple: 1) $x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ y_0 = -\frac{1}{2} \\ \Delta = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow x_0^2 + y_0^2 - \Delta = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow$ cerc real

$(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{2}$

2) $x^2 + y^2 - x + y + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ y_0 = -\frac{1}{2} \\ \Delta = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow x_0^2 + y_0^2 - \Delta = 0 \Rightarrow$ punct dublu

$(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

3) $x^2 + y^2 - x + y + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ y_0 = -\frac{1}{2} \\ \Delta = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow x_0^2 + y_0^2 - \Delta = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ cerc imaginar

$(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} = 0$

În cazul unei drepte, două puncte distincte o det. în mod unic. Am văzut că știind coordonatele a 2 puncte distincte putem deduce ecuațiile dreptei det. de cele 2 puncte.

În cazul unui cerc, acesta este unic determinat de 3 puncte necoliniare (este cercul circumscris unui Δ det). Arătăm că date 3 puncte necoliniare $A_i(x_i, y_i)$, $i=\overline{1,3}$, putem deduce ec. generală a cercului pe care îl determină (în care apar 3 necunoscute: coordonatele centrului (x_0, y_0) și raza (sau r))

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 - 2x_0x_1 - 2y_0y_1 + r^2 = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 - 2x_0x_2 - 2y_0y_2 + r^2 = 0 \\ x_3^2 + y_3^2 - 2x_0x_3 - 2y_0y_3 + r^2 = 0 \end{cases} \quad (S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0x_1 + 2y_0y_1 - r^2 = x_1^2 + y_1^2 \\ 2x_0x_2 + 2y_0y_2 - r^2 = x_2^2 + y_2^2 \\ 2x_0x_3 + 2y_0y_3 - r^2 = x_3^2 + y_3^2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2y_1 & -1 \\ 2x_2 & 2y_2 & -1 \\ 2x_3 & 2y_3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -4 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ pt. că punctele } A_1, A_2, A_3 \text{ necolin.}$$

$\Rightarrow$ sist. (S_1) este compatibilă, determinat cu sol. unică - M2-44.

În acest caz, i.e. cercului (deci ecuația pe care o va satisface un punct arbitrar $P(x, y)$ care aparține cercului, deci care satisface și el sist. (S_1)) este dată de:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

În acest det. îl puteți gândi ca fiind determinantul caracteristic al sist. originar (S_1) după care știu că este compatibil determinat, la care adăug și ec. satisfăcută de punctul arbitrar $P(x, y)$ și care nu aduce nimic nou.

↳ p. că matricea A are rangul r și fie $\Delta \neq 0$ un minor de ordin r .

Definiție. Numim determinantul caracteristic, un determinant obținut prin înlocuirea lui Δ cu coloana termenilor liberi și cu una din liniile rămase.

Teorema lui Rouché. Sist. este compatibil d.m.d. toți determinanții caracteristici sunt nuli.

Analog, putem scrie ec. unei sfele unic determinată de 4 puncte necoplanare $A_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=\overline{1,4}$, deci cu verifică condiția

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ec. sferei:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuațiile parametrice ale unui cerc în E_2

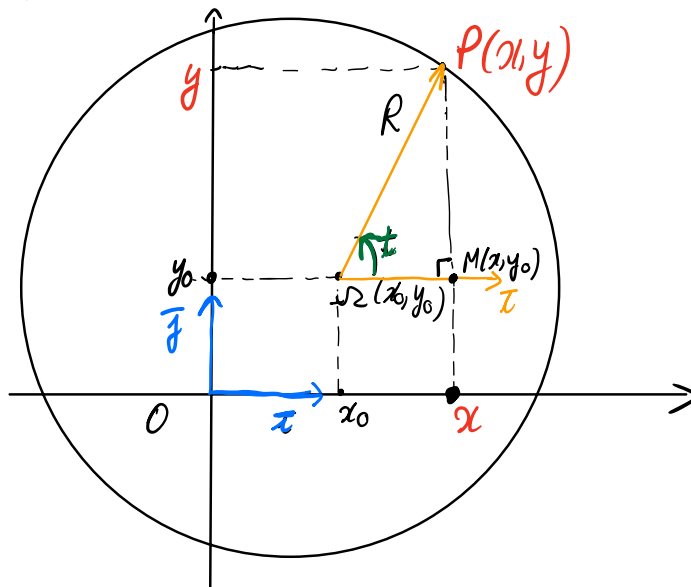
Fie $\Omega(x_0, y_0)$, $R > 0$, $P(x, y) \in \mathcal{C}(\Omega, R)$ un punct oarecare și $t = \angle(\vec{i}, \vec{\Omega P})_0 \in (-\pi, \pi]$

$$\vec{\Omega P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} ; |\vec{\Omega P}| = R$$

$$t = \angle(\vec{i}, \vec{\Omega P})_0 \Rightarrow$$

$$\cos t = \frac{\langle \vec{i}, \vec{\Omega P} \rangle}{|\vec{i}| |\vec{\Omega P}|} = \frac{x - x_0}{R} \Rightarrow \underline{x = R \cos t + x_0}$$

$$\sin t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x - x_0 \\ 0 & y - y_0 \end{vmatrix}}{|\vec{i}| |\vec{\Omega P}|} = \frac{y - y_0}{R} \Rightarrow \underline{y = R \sin t + y_0}$$



Ecuațiile parametrice ale $\mathcal{C}(\Omega, R)$:

$$(1) \begin{cases} x = R \cos t + x_0 \\ y = R \sin t + y_0 \end{cases}$$

$$t \in (-\pi, \pi]$$

Ecuațiile parametrice ale unei sfere în $\mathbb{E}_3$

Fie $R = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ reper cartezian în $\mathbb{E}_3$.

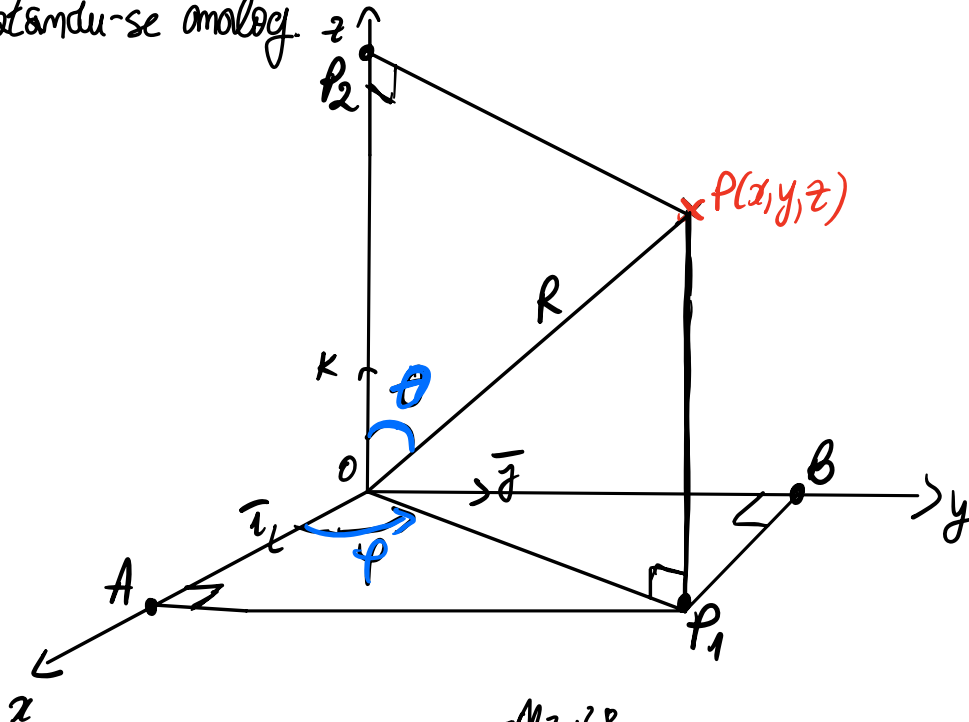
Pt. început vom det. ec-le parametrice ale sferei cu centrul în originea reperului și de rază $R > 0$.

Fie $P(x, y, z) \in S^2(O; R)$ arbitrar. Notăm cu P_1 proiecția ortogonală a lui P pe planul $(x, y) = O + [\vec{i}, \vec{j}]$ și cu P_2 proiecția ortogonală a lui P pe axa $Oz = O + [\vec{k}]$.

Fie $\varphi = \angle(\vec{i}, \vec{OP}_1) \in (-\pi, \pi]$, $\theta = \angle(\vec{k}, \vec{OP}) \in [0, \pi]$.

Numim $\begin{cases} \varphi - \text{longitudinea lui } P \\ \theta - \text{co-latitudinea lui } P \end{cases}$

Fără a pierde generalitatea pp. că $\theta, \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, celelalte cazuri tratându-se analog.



Fie A = proiecția ortog. a lui P_1 pe Ox
 B = proiecția ortog. a lui P_1 pe Oy .

$$\begin{aligned}
 \vec{OP} &= \vec{OP_1} + \vec{OP_2} \\
 &= \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OP_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{În } \triangle OP_2P (dr.) : \cos \theta &= \frac{OP_2}{R} \Leftrightarrow \underline{OP_2 = R \cos \theta} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \underline{\vec{OP_2} = R \cos \theta \vec{h}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{În } \triangle OP_2P (dr.) \Rightarrow P_2P &= \sqrt{R^2 - OP^2} = \sqrt{R^2(1 - \cos^2 \theta)} \\
 &= R \sin \theta \quad (\theta \in [0, \pi] \Rightarrow \sin \theta \geq 0)
 \end{aligned}$$

$$OP_1P_2 \text{ dreptunghi} \Rightarrow OP_1 = P_2P = R \sin \theta$$

$$\begin{aligned}
 \text{În } \triangle OAP_1 (dr.) \Rightarrow \cos \varphi &= \frac{OA}{OP_1} \Leftrightarrow OA = R \cos \varphi \sin \theta \Rightarrow \\
 \Rightarrow \underline{\vec{OA} = R \cos \varphi \sin \theta \vec{i}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{În } \triangle OAP_1 (dr.) \Rightarrow \sin \varphi &= \frac{AP_1}{OP_1} \Leftrightarrow AP_1 = R \sin \varphi \sin \theta / \Rightarrow \\
 OAP_1B \text{ dreptunghi} \Rightarrow AP_1 &= OB
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow OB = R \sin \varphi \sin \theta \Rightarrow \underline{\vec{OB} = R \sin \varphi \sin \theta \vec{j}}$$

Deci

$$\begin{aligned}
 \vec{OP} &= R \cos \varphi \sin \theta \vec{j} + R \sin \varphi \sin \theta \vec{j} + R \cos \theta \vec{h} \\
 \Leftrightarrow P(R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta)
 \end{aligned}$$

$$(2) \begin{cases} x = R \cos \varphi \sin \theta \\ y = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \theta \end{cases}, \theta \in [0, \pi], \varphi \in (-\pi, \pi]$$

Ex. (2) n.m. ecuațiile parametrice ale sferei cu centrul
în originea reperului R și raza R .

Fie acum pct.-ul $\mathcal{R}$ cu coordonatele (x_0, y_0, z_0) în raport cu R , și vom
să determinăm ecuațiile parametrice ale sferei cu centrul în
 $\mathcal{R}$ și raza R . Pentru a nu folosi de concluziile anterioare vom
considera schimbarea de reper:

$$R = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \mapsto R' = \{\mathcal{R}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

Formula schimbării de coordonate este:

$$X = SX' + S_0$$

Cum baza $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ a rămas neschimbată, rezultă că

$$S = I_3$$

și deci

$$X = X' + S_0, *$$

unde $S_0 =$ matricea coord. lui Ω în raport cu R ,
 adică matricea coord. lui $\vec{O\Omega}$ în raport
 cu $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, $S_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

Fie $P \in S^2(\Omega, R)$. At. coordonatele lui P în raport
 cu R' sunt:

$$\begin{cases} x' = R \cos \varphi \sin \theta \\ y' = R \sin \varphi \sin \theta \\ z' = R \cos \theta \end{cases}, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)$$

Folosind formula schimbării, obținem coordonatele
 lui P în raport cu R :

$$(3) \begin{cases} x = R \cos \varphi \sin \theta + x_0 \\ y = R \sin \varphi \sin \theta + y_0 \\ z = R \cos \theta + z_0 \end{cases}$$

Ec. (3) sunt ecuațiile param. ale $S^2(\Omega, R)$, unde
 $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ în raport cu $R = \{\vec{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Posiția relativă a unei drepte față de un cerc / sferă

Propoziție. Fie Γ un cerc (o sferă) de centru Ω și raza R și d o dreaptă. Atunci avem următoarele situații:

i) $\Gamma \cap d = \{2 \text{ puncte}\} \Leftrightarrow d(\Omega, d) < R$

În acest caz, d s.m. secantă cercului / sferei

ii) $\Gamma \cap d = \{1 \text{ punct (dublu)}\} \Leftrightarrow d(\Omega, d) = R$

În acest caz, d s.m. tangentă cercului / sferei

iii) $\Gamma \cap d = \emptyset$ (puncte imaginare) $\Leftrightarrow d(\Omega, d) > R$

În acest caz, d s.m. exterioară cercului / sferei

Demonstrație:

Fie $\Gamma: |\vec{r} - \vec{r}_\Omega|^2 = R^2$ ecuația cercului / sferei de centru Ω și raza R

și $d: \vec{r} = \vec{r}_A + t \cdot \vec{u}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ ec. unei drepte ce trece prin $A(\vec{r}_A)$ și are direcția dată de $\vec{u}$

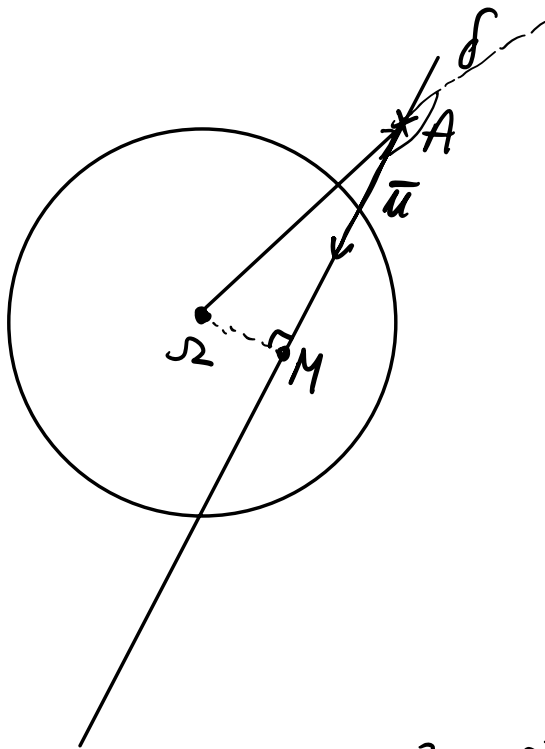
$$\Gamma \cap d: \begin{cases} |\vec{r} - \vec{r}_\Omega|^2 = R^2 \\ \vec{r} = \vec{r}_A + t \vec{u} \end{cases} \Rightarrow |\vec{r}_A + t \vec{u} - \vec{r}_\Omega|^2 = R^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |(\vec{r}_A - \vec{r}_\Omega) + t \vec{u}|^2 = R^2 \Leftrightarrow |\vec{r}_A - \vec{r}_\Omega|^2 + 2t \langle \vec{r}_A - \vec{r}_\Omega, \vec{u} \rangle + t^2 |\vec{u}|^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow |\vec{u}|^2 t^2 + 2 \langle \vec{r}_A - \vec{r}_\Omega, \vec{u} \rangle t + |\vec{r}_A - \vec{r}_\Omega|^2 - R^2 = 0 \quad (*)$$

$(*)$ este o ecuație de ordin 2 în t

$$\begin{aligned}\Delta &= 4(\langle \vec{R}A, \vec{u} \rangle)^2 - 4|\vec{u}|^2(|\vec{R}A|^2 - R^2) \\ &= 4[(\langle \vec{R}A, \vec{u} \rangle)^2 - |\vec{u}|^2|\vec{R}A|^2] + 4|\vec{u}|^2 R^2 \\ &= 4[|\vec{R}A|^2|\vec{u}|^2(\cos^2 \theta + (\langle \vec{R}A, \vec{u} \rangle - 1))] + 4|\vec{u}|^2 R^2 \\ &= 4[-|\vec{R}A|^2|\vec{u}|^2 \sin^2 \theta + (\langle \vec{R}A, \vec{u} \rangle)] + 4|\vec{u}|^2 R^2\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Für } \Omega M \perp \mathcal{C}, M \in \mathcal{C} \\ \sin \angle (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{u}) = \\ \sin (\pi - \widehat{\Omega A M}) = \sin (\widehat{\Omega A M}) = \\ = \frac{\Omega M}{\Omega A} = \frac{d(\Omega, \mathcal{C})}{|\overrightarrow{\Omega A}|} \end{aligned}$$

$$\Delta = -4 \cdot \cancel{|\vec{\sigma}_A|^2} \cdot |\vec{u}|^2 \cdot \frac{d^2(\sigma, \delta)}{\cancel{|\vec{\sigma}_A|^2}} + 4|\vec{u}|^2 R^2$$

$$\Delta = 4|\bar{u}|^2 (R^2 - d^2(R, d))$$

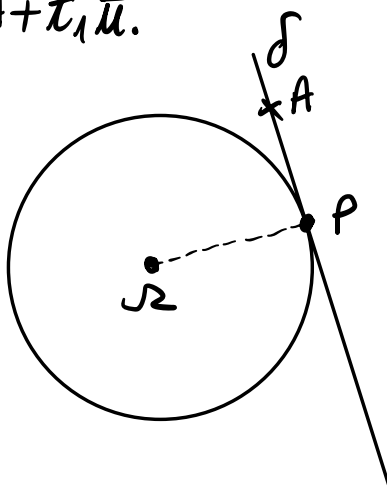
Distingem urm. situații:

1) Dacă $d(\mathcal{L}, \delta) = R$, at. $\Delta = 0$, în rez. ec.

$$|\vec{u}|^2 t^2 + 2\langle \vec{\mathcal{L}}\vec{A}, \vec{u} \rangle t + |\vec{\mathcal{L}}\vec{A}|^2 - R^2 = 0$$

$$\text{sunt } t_1 = t_2 = -\frac{2\langle \vec{\mathcal{L}}\vec{A}, \vec{u} \rangle}{2|\vec{u}|^2} = -\frac{\langle \vec{\mathcal{L}}\vec{A}, \vec{u} \rangle}{|\vec{u}|^2}$$

Deci intersecția dintre dreaptă și cerc/sferă este punctul $P = A + t_1 \vec{u}$.



Consecință: Cărm δ tang. la cerc/sferă $\Leftrightarrow d(\delta, \mathcal{L}) = R$,
notând intersecția dintre δ și cerc/sferă cu punctul P , obt. că

$$\delta \text{ tang. la cerc/sferă} \Rightarrow d(\delta, \mathcal{L}) = |\vec{\mathcal{L}}\vec{P}|$$

$$\Leftrightarrow \vec{\mathcal{L}}\vec{P} \perp \delta$$

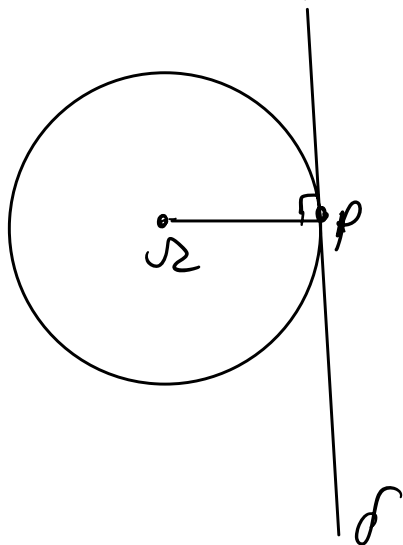
$\Leftrightarrow \delta$ este perpendiculară pe raza cercului/sferei în punctul de contact.

Observatie 2 Dacă δ este o dreaptă tangentă la un cerc
cu centrul Ω și raza R în punctul P

(punctul P este punctul de contact dintre dreaptă
și cerc) obținem:

$$\mathcal{G}(\Omega, R): |\vec{x} - \vec{x}_{\Omega}|^2 = R^2 \Leftrightarrow \underline{< \vec{x} - \vec{x}_{\Omega}, \vec{x} - \vec{x}_{\Omega} > = R^2}$$

$$P(\vec{x}_P) \in \mathcal{G}(\Omega, R) \Rightarrow |\vec{x}_P - \vec{x}_{\Omega}| = R \Rightarrow |\vec{\Omega P}| = R$$



$$\delta: < \vec{x} - \vec{x}_P, \vec{\Omega P} > = 0 \Rightarrow \underline{\vec{\Omega P} \perp \delta}$$

$\mathbb{I}$

$$\delta: < \vec{x} - \vec{x}_P, \vec{x}_P - \vec{x}_{\Omega} > = 0 \quad | + R^2$$

$$\delta: < \vec{x} - \vec{x}_P, \vec{x}_P - \vec{x}_{\Omega} > + R^2 = R^2$$

$$\delta: < \vec{x} - \vec{x}_P, \vec{x}_P - \vec{x}_{\Omega} > + < \vec{x}_P - \vec{x}_{\Omega}, \vec{x}_P - \vec{x}_{\Omega} > = R^2$$

$\mathbb{I}$

$$\boxed{< \vec{x} - \vec{x}_{\Omega}, \vec{x}_P - \vec{x}_{\Omega} > = R^2}$$

$\mathcal{R}$ ec. obținută prin deducere în punctul de
contact P .

Observatie 2. Dacă δ este o dreaptă tangentă la o sferă cu centrul Ω și raza R în punctul P (punctul P este punctul de contact dintre dreapta sferă) obținem:

$$S(\Omega, R): |\vec{x} - \vec{x}_{\Omega}|^2 = R^2 \Leftrightarrow \underline{< \vec{x} - \vec{x}_{\Omega}, \vec{x} - \vec{x}_{\Omega} > = R^2}$$

$$P(\vec{x}_P) \in S(\Omega, R) \Rightarrow |\vec{x}_P - \vec{x}_{\Omega}| = R \Rightarrow |\vec{\Omega P}| = R \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{\Omega P} \perp \delta \Rightarrow \delta \text{ aparține planului } \pi, \text{ unde}$$

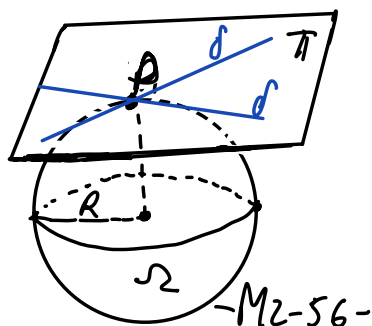
$$\pi: < \vec{x} - \vec{x}_P, \vec{\Omega P} > = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\pi: < \vec{x} - \vec{x}_{\Omega}, \vec{x}_P - \vec{x}_{\Omega} > = R^2}$$

π este planul tangent la S în P iar ec. sa se obține prin deducere în punctul de contact P .

Obs: 1) $\text{dist}(\Omega, \pi) = |\vec{\Omega P}| = R$.

2) Există o infinitate de drepte tangente la S în P .



-M2-56-

2) Dacă $d(\mathcal{L}, \mathcal{S}) < R$, at. $\Delta > 0$, în 2 sol. ec.

$$|\vec{u}|^2 t^2 + 2 \langle \mathcal{L} \vec{P}_0, \vec{u} \rangle t + |\mathcal{L} \vec{P}_0|^2 - R^2 = 0$$

sunt

$$t_1 = \frac{-2 \langle \mathcal{L} \vec{P}_0, \vec{u} \rangle + 2 |\vec{u}| \sqrt{R^2 - d^2(\mathcal{L}, \mathcal{S})}}{2 |\vec{u}|^2}$$

$$t_1 = - \frac{\langle \mathcal{L} \vec{P}_0, \vec{u} \rangle + |\vec{u}| \sqrt{R^2 - d^2(\mathcal{L}, \mathcal{S})}}{|\vec{u}|^2}$$

$$t_2 = - \frac{\langle \mathcal{L} \vec{P}_0, \vec{u} \rangle - |\vec{u}| \sqrt{R^2 - d^2(\mathcal{L}, \mathcal{S})}}{|\vec{u}|^2}$$

Deci intersecția dintre dreapta și arc/sferă este dată de P_1, P_2 : $P_1 = P_0 + t_1 \vec{u}$, $P_2 = P_0 + t_2 \vec{u}$,
într-un anumit caz se poate recomăna cerului/sferei

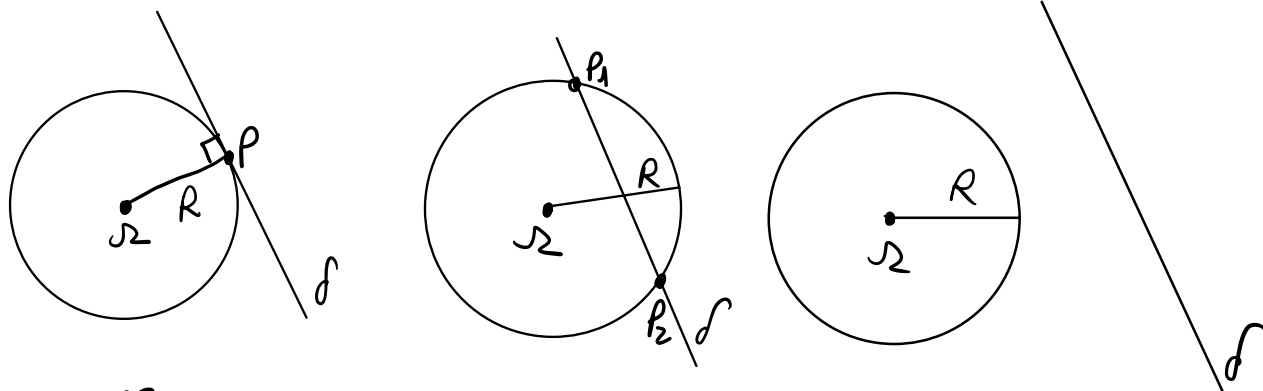
3) Dacă $d(\mathcal{L}, \mathcal{S}) > R$, at. $\Delta < 0$, în 0 ec.

$$|\vec{u}|^2 t^2 + 2 \langle \mathcal{L} \vec{P}_0, \vec{u} \rangle t + |\mathcal{L} \vec{P}_0|^2 - R^2 = 0$$

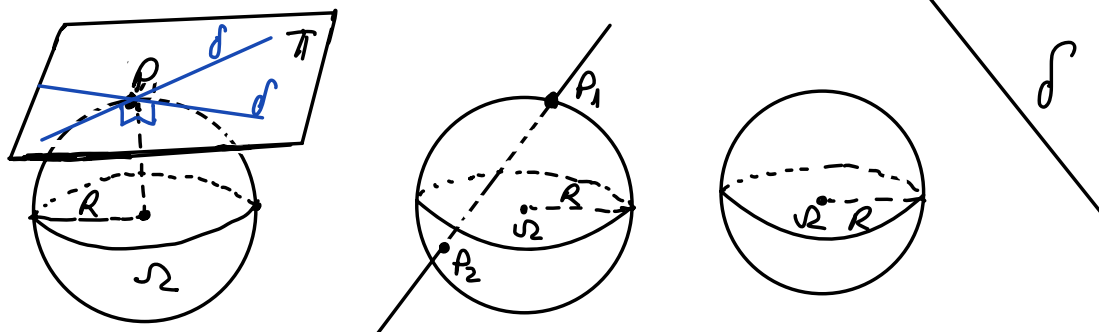
nu are sol. reale.

Deci intersecția dintre dreapta și arc/sferă este $\emptyset$
și în acest caz dreapta este exterioară cerului/sferei.

o $\mathcal{L}_2$



o $\mathcal{L}_3$



Observatie

$$1) \mathcal{B}(O_2, R): (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

$$\delta\text{-dr. tang. la } \mathcal{B}(O_2, R), \delta \cap \mathcal{B}(O_2, R) = \{P\}, P(x_p, y_p) \left. \vphantom{\begin{matrix} \delta\text{-dr. tang. la } \mathcal{B}(O_2, R), \\ \delta \cap \mathcal{B}(O_2, R) = \{P\}, P(x_p, y_p) \end{matrix}} \right\} \Rightarrow$$

$$\delta: (x-x_0)(x_p-x_0) + (y-y_0)(y_p-y_0) = R^2$$

$$2) S^2(O_2, R): (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

$$\pi\text{-planul tang. la } S^2(O_2, R), \pi \cap S^2(O_2, R) = \{P\}, P(x_p, y_p, z_p) \left. \vphantom{\begin{matrix} \pi\text{-planul tang. la } S^2(O_2, R), \\ \pi \cap S^2(O_2, R) = \{P\}, P(x_p, y_p, z_p) \end{matrix}} \right\} \Rightarrow$$

$$\pi: (x-x_0)(x_p-x_0) + (y-y_0)(y_p-y_0) + (z-z_0)(z_p-z_0) = R^2$$

Exemplu: Cercul cu centrul în $\Omega(2,1)$ și raza $R=3$.
Ec. tangentei la cerc în punctul $A(2, 4)$.

$$\mathcal{C}(\Omega, R): |\vec{r} - \vec{r}_{\Omega}| = R \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}_{\Omega}|^2 = R^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{r} - \vec{r}_{\Omega}, \vec{r} - \vec{r}_{\Omega} \rangle = R^2$$

$$\Leftrightarrow \underline{(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9}$$

$$\Leftrightarrow \underline{x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0}$$

$$A \in \mathcal{C}(\Omega, R) \Leftrightarrow (2-2)^2 + (4-1)^2 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9(A)$$

Ec. tangentei la cerc în A este:

$$\langle \vec{r} - \vec{r}_{\Omega}, \vec{r}_A - \vec{r}_{\Omega} \rangle = R^2$$

$$\Leftrightarrow \underline{(x-2)(x_A-2) + (y-1)(y_A-1) = 9}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(2-2) + (y-1)(4-1) = 9$$

$$\Leftrightarrow 3y - 3 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3y - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow y - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x \cdot x_A + y \cdot y_A \rightarrow 4 \frac{x+x_A}{2} - 2 \frac{y+y_A}{2} - 4 = 0}$$

$$\lceil 2x + 4y - 2x - 4 - y - 4 - 4 = 0$$

$$3y - 12 = 0 \Leftrightarrow y - 4 = 0 \rfloor$$

$$\text{Am înlocuit} \left\{ \begin{array}{l} x^2 = xx \mapsto x x_0 \\ x = \frac{x+x}{2} \mapsto \frac{x+x_0}{2} \\ y^2 = yy \mapsto y y_0 \\ y = \frac{y+y}{2} \mapsto \frac{y+y_0}{2} \end{array} \right.$$

Posiția relativă a unui plan față de o sferă

Propoziție. Fie S o sferă de centru Ω și raza R și π un plan. Atunci avem următoarele situații:

i) $S \cap \pi = \{\text{cerc}\} \Leftrightarrow d(\Omega, \pi) < R$

În acest caz, π s.m. secantă sferii

ii) $S \cap \pi = \{1 \text{ punct (dublu)}\} \Leftrightarrow d(\Omega, \pi) = R$

În acest caz, π s.m. tangente sferii.

iii) $S \cap \pi = \emptyset$ (puncte imaginare) $\Leftrightarrow d(\Omega, \pi) > R$

În acest caz, π s.m. exterior sferii.

Propoziție. Fie sferă $S(\Omega, R)$ din E_3 și $A \in S(\Omega, R)$. Atunci planul tang. la sferă în A are ec. $\langle \vec{r} - \vec{r}_{\Omega}, \vec{r}_A - \vec{r}_{\Omega} \rangle = R^2$

Dem $\Rightarrow$ Fie π planul tang. la $S(\Omega, R)$ în A ($\Rightarrow \pi \cap S(\Omega, R) = \{A\}$)
 Arătăm că $\pi: \langle \vec{r} - \vec{r}_{\Omega}, \vec{r}_A - \vec{r}_{\Omega} \rangle = R^2$
~~///~~

Fie $d_1, d_2 \subset \pi$, $d_1 \cap d_2 = \{A\}$. Deci

$d_1 \cap S(\Omega, R) = \{A\}$ $\Rightarrow$ d_1 și d_2 sunt tangente
 $d_2 \cap S(\Omega, R) = \{A\}$ sferei în A și ele sunt

incluse în planul $d: \langle \vec{r} - \vec{r}_{\Omega}, \vec{r}_A - \vec{r}_{\Omega} \rangle = R^2$

Cum $d_1, d_2 \subset \pi$ sunt 2 drepte concurente din planul π atunci ele determină în mod unic planul π . Deci $d = \pi$, adică:

$$\pi: \langle \vec{r} - \vec{r}_{\Omega}, \vec{r}_A - \vec{r}_{\Omega} \rangle = R^2$$

$\boxed{\Leftarrow}$ p. că $\pi: \langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_A - \vec{r}_0 \rangle = R^2$
 Autorem că π este tangent sferii în A adică
 $\pi \cap S(\mathcal{R}, R) = \{A\} \Leftrightarrow d(\mathcal{R}, \pi) = R$

$$\pi: (x - x_0)(x_A - x_0) + (y - y_0)(y_A - y_0) + (z - z_0)(z_A - z_0) = R^2$$

$\mathbb{I}$

$$\pi: (x_A - x_0)x + (y_A - y_0)y + (z_A - z_0)z - x_0(x_A - x_0) - y_0(y_A - y_0) - z_0(z_A - z_0) - \underline{R^2} = 0$$

$$A \in S(\mathcal{R}, R) \Rightarrow (x_A - x_0)^2 + (y_A - y_0)^2 + (z_A - z_0)^2 = \underline{R^2}$$

$$\begin{aligned} \pi: (x_A - x_0)x + (y_A - y_0)y + (z_A - z_0)z - \\ - (x_A - x_0)(x_0 + x_A - x_0) - (y_A - y_0)(y_0 + y_A - y_0) - \\ - (z_A - z_0)(z_0 + z_A - z_0) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x_A - x_0)x + (y_A - y_0)y + (z_A - z_0)z - x_A(x_A - x_0) - y_A(y_A - y_0) - z_A(z_A - z_0) = 0$$

$$d(\mathcal{R}, \Pi) = \frac{|(x_A - x_0) \cdot x_0 + (y_A - y_0) y_0 + (z_A - z_0) z_0 - x_A(x_A - x_0) - y_A(y_A - y_0) - z_A(z_A - z_0)|}{\sqrt{(x_A - x_0)^2 + (y_A - y_0)^2 + (z_A - z_0)^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$d(\mathcal{R}, \Pi) = \frac{|-(x_A - x_0)^2 - (y_A - y_0)^2 - (z_A - z_0)^2|}{\sqrt{(x_A - x_0)^2 + (y_A - y_0)^2 + (z_A - z_0)^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$d(\mathcal{R}, \Pi) = \sqrt{(x_A - x_0)^2 + (y_A - y_0)^2 + (z_A - z_0)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{d(\mathcal{R}, \Pi) = R} \quad \square$$

Observation: $S^2(\mathcal{R}, R): (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$, under $\mathcal{R}(x_0, y_0, z_0)$

$$S^2(\mathcal{R}, R): x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0$$

Fie $A \in S(R)$, $A(x_A, y_A, z_A)$. Planul tangent la $S(R)$ în punctul A are ec:

$$x \cdot x_A + y \cdot y_A + z \cdot z_A - x_0(x+x_A) - y_0(y+y_A) - z_0(z+z_A) + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)(x_A-x_0) + (y-y_0)(y_A-y_0) + (z-z_0)(z_A-z_0) = R^2$$

$$x^2 = x x \rightarrow x x_0; \quad x = \frac{x+x_0}{2} \leadsto \frac{x+x_0}{2}$$

Analog y și z

Definiție. Fie $C(R)/S(R)$ și $A \in C(A \in S)$.
 Dăruim o n.m. normală la C/S în A .

Obs: 1) Normală la C în $A \perp$ tangenta la C în A .

2) Normală la S în $A \perp$ planul tangent la C în A

3) Există o unică normală la C/S în $A \in C/S$.